

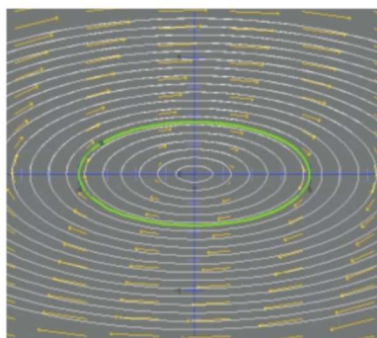
## Movimentos Pendulares

"Ouvi dizer a um homem instruído [Eratóstenes] que o tempo não é mais que o movimento do sol. Por que não seria antes o movimento de todos os corpos? Se os astros parassem e continuasse a mover-se a roda do oleiro, deixaria de haver tempo para medirmos as suas voltas?" - Santo Agostinho, em *Confissões*.

O Atractor desenvolveu um conjunto de aplicações interactivas sobre diversos tipos de sistemas dinâmicos oscilatórios. As versões mais elementares são o oscilador harmónico e o pêndulo simples. No primeiro, uma bola de massa  $m$  está sujeita apenas à acção de uma mola;



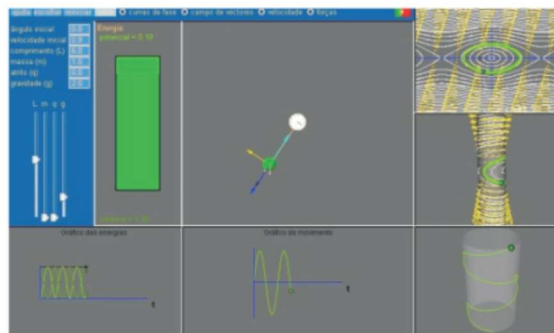
se a localização da bola for descrita relativamente à posição de repouso da mola, a força  $f$  exercida, para cada posição  $x$ , sobre a bola é a de distensão ou compressão da mola e tem o sinal oposto ao de  $x$ . Supondo-a proporcional ao deslocamento, teremos  $f(x) = -k x$  ( $k > 0$ ). A equação do movimento será, pois,  $-k x = m x''$  ou  $x'' = -k/m x$ , equação diferencial de 2.<sup>a</sup> ordem equivalente ao sistema de equações de 1.<sup>a</sup> ordem  $x' = y, y' = -k/m x$ .



<sup>1</sup><http://www.atractor.pt/mat/pendulos/oscilador>

<sup>2</sup><http://www.atractor.pt/mat/pendulos/penduloRigido>

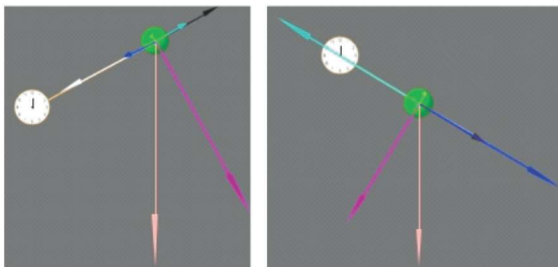
A cada solução da equação corresponderá, no plano  $xy$ , uma curva (dita de fase) tangente em cada ponto  $(x,y)$  ao vector  $(y, -k/m x)$ . O *applet*<sup>1</sup> permite variar os parâmetros  $m$  e  $k$  e seguir, em simultâneo, o movimento da bola e do ponto  $(x,y)$  no plano de fase, as variações das energias cinética e potencial e o gráfico do movimento. No segundo exemplo, do pêndulo simples<sup>2</sup>, a bola de massa  $m$  move-se num plano por acção da gravidade  $g$ , mantendo-se ligada a um ponto por uma haste rígida (de comprimento  $L$ , eventualmente com atrito  $q$  e suposta sem massa).



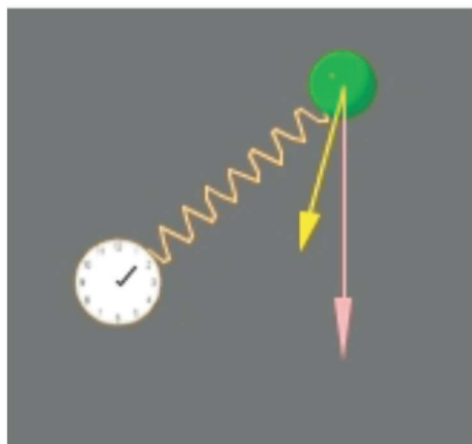
A posição da bola é descrita pelo ângulo  $x$  da haste com a posição de equilíbrio (na vertical) e há que estudar as forças que actuam sobre a bola. O *applet* permite analisar *em tempo real* o movimento e velocidade da bola, as variações da energia, o espaço de fase e gráficos do movimento e ainda as forças que nela actuam.

# Atractor

## [Movimentos Pendulares]



Nas figuras em cima, o vector peso, na vertical, decompõe-se numa componente tangencial ( $-p \text{ Sen } x$ ) e noutra radial e, em movimento, surge ainda uma componente radial de força centrífuga; a resultante das componentes radiais (azul escuro) é equilibrada pela reacção da haste (azul claro), pelo que a resultante radial final é sempre nula. A única componente relevante para o movimento do pêndulo é a tangencial ( $-p \text{ Sen } x$ ) e a equação será  $-p \text{ Sen } x = m x''$  ou  $-mg \text{ Sen } x = m x''$ , ou ainda  $x'' = -g \text{ Sen } x$ , equivalente a  $x' = y$ ,  $y' = -g \text{ Sen } x$ . Além daqueles dois exemplos, foram programados outros *applets*:



**1. Pêndulo simples de fio**<sup>3</sup>, cuja dinâmica é distinta da anterior porque a componente radial só será anulada pela reacção do fio se essa componente radial apontar *para fora*, com o fio a compensar com uma força *para dentro* de grandeza igual. Se a componente radial apontar *para dentro*, o fio não a compensa e o movimento deixa de ser pendular: a posição da bola é agora descrita por dois parâmetros e a bola entra em queda livre com movimento parabólico, até o fio esticar de novo.

<sup>3</sup><http://www.atractor.pt/mat/pendulos/penduloFio>

<sup>4</sup><http://www.atractor.pt/mat/pendulos/2pendulos>

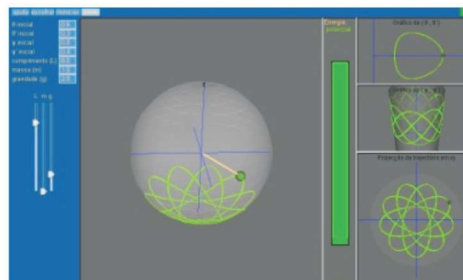
<sup>5</sup><http://www.atractor.pt/mat/pendulos/penduloEsferico>



O *applet* trata este caso, admitindo choque inelástico no "esticão", com a consequente perda de energia; e permite a observação de comportamentos muito interessantes: a alternância entre os dois tipos de movimento, pendular e de queda livre, com gradual perda de energia.



**2. Dois pêndulos rígidos**<sup>4</sup> movendo-se simultaneamente, permitindo assim fazer verificações *experimentais* - se não houver atrito, o período não depende da massa, para pequenas oscilações, *quase* não depende da amplitude inicial e se, além disso, o comprimento de um aumentar por um factor  $k^2$  (4, na figura), o período aumenta por um factor  $k$ .



**3. Pêndulo esférico**<sup>5</sup>.

amplitude inicial  $\rightarrow$  maior período e menor comprimento    menor período) se compensem; prova-se que a solução é uma cicloide.

**4. Pêndulo duplo<sup>6</sup>** com os conhecidos comportamentos de tipo caótico e em que se pode também ver em tempo real a trajectória do movimento no toro, que é o espaço de configurações associado.

# 1

**7. Pêndulos acoplados<sup>7</sup>**, em que há agora cinco tipos diferentes de energia, e uma (quase) total transferência alternada da energia de um para o outro pêndulo, bem visível pela própria simulação, pelo gráfico (de barras) da energia, pelos dois gráficos do movimento e pela alternância com que as órbitas aparecem em direcções quase perpendiculares, no espaço de configurações (toro). **8. Pêndulo excitado<sup>8</sup>** com os fenómenos de ressonância associados; e

**5. Pêndulo cicloidal<sup>7</sup>** (ou **tautócrono**), cuja frequência não depende da amplitude das oscilações, o que pode ser verificado *experimentalmente* com **6. Dois pêndulos cicloidais<sup>8</sup>**. A independência da frequência consegue-se com uma curva "de encosto" para o fio do pêndulo: o comprimento útil do pêndulo vai diminuindo à medida que a amplitude cresce. Com uma forma adequada para essa curva, consegue-se que os efeitos (contrários) dessas variações (maior

**9. Ressonância de ponte**, em que é evocado um episódio de ressonância<sup>11</sup> da ponte D. Luís (Porto-Gaia), ocorrido em Abril de 1931, aquando do funeral de um estudante de Medicina, que morrerá ao ser perseguido pela polícia. [E3](#)

<sup>6</sup><http://www.atractor.pt/maf/pendulos/penduloDuplo>  
<sup>7</sup><http://www.atractor.pt/maf/pendulos/penduloCicloidal>  
<sup>8</sup><http://www.atractor.pt/maf/pendulos/2pendulosCicloidais>  
<sup>9</sup><http://www.atractor.pt/mat/pendulos/pendulosAcoplados>  
<sup>10</sup><http://www.atractor.pt/mat/pendulos/penduloExcitado>  
<sup>11</sup><http://www.atractor.pt/mat/pendulos/osciladorPonte>