Cuidado a ter ao introduzir a noção de simetria

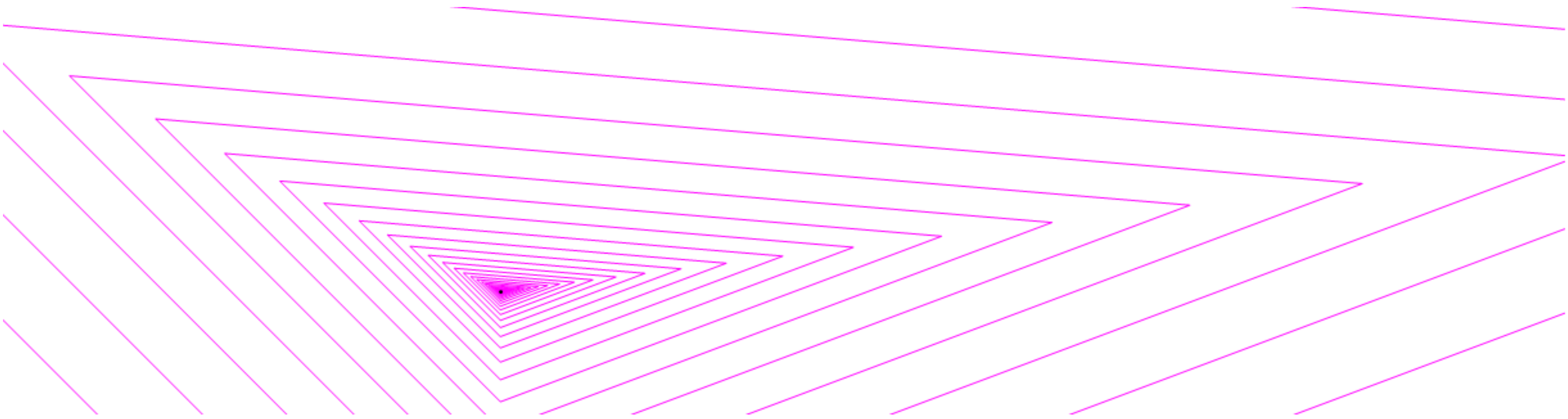
No DVD do Atractor *Simetria – apresentação dinâmica*, apresenta-se a noção de simetria desta maneira relativamente informal:

> Uma *simetria de uma figura* é uma isometria que envia a figura exactamente sobre si própria, por forma que o aspecto seja o mesmo antes e depois da transformação: não deve ser possível distinguir a figura inicial da final (nem em termos de forma, nem de posição, nem de cor)(*). A figura diz-se *invariante* por essa isometria. A

E dá-se em (*) um link para um endereço no site do Atractor, onde se podem encontrar definições formais da noção de simetria de figuras coloridas (começando por precisar o que se entende por uma figura colorida). Esse tratamento mais formal que está na nota do site não é certamente o mais indicado para uma fase de introdução à noção de simetria. Mas, mesmo num tratamento informal como o adoptado no DVD do Atractor, convém ter alguns cuidados. **O presente texto tem como objectivo explicar por que razão a palavra *isometria* (ou uma expressão de sentido equivalente, como *transformação que conserve as distâncias*) é essencial na frase acima transcrita.** Isto é, trata-se de explicar a razão pela qual a condição expressa acima não é equivalente à que se obteria se em vez da palavra *isometria* tivéssemos utilizado a palavra *transformação*. O texto surge por se ter chegado à conclusão que a ideia (errada), de que uma transformação do plano que conserve uma figura invariante conserva necessariamente as distâncias, está bastante espalhada.

Como toda a isometria é uma transformação (ou bijecção), a condição acima (transcrita do DVD), imposta na definição de simetria – «*ser uma isometria que envia...*» – é mais forte do que a condição que teria a palavra «transformação» em substituição de «isometria». Para mostrar a não-equivalência das duas condições, basta dar um exemplo de uma figura e de uma transformação que satisfaçam à condição mais fraca e não à mais forte.

Eis um tal contra-exemplo simples: tomemos o plano cartesiano e um triângulo escaleno T. E consideremos a figura seguinte, obtida como reunião dos homotéticos dos lados de T, pelas homotetias de centro num ponto do interior do triângulo escaleno dado e razões k^n, com n variável inteiro qualquer, positivo ou negativo e k fixo ($k>0$, $k\neq 1$) (na figura, $k = 0.8$):



Esta figura ilimitada no plano não tem nenhuma simetria (no sentido habitual dessa palavra), para além do caso trivial e sem interesse da identidade. No entanto, há transformações que *deixam invariante a figura (que enviam a figura exactamente sobre si própria de forma que o aspecto seja o mesmo antes e depois da transformação). ...* e não é *possível distinguir a figura inicial da final, nem em termos de forma, nem de posição, nem de cor).* Há uma infinidade de transformações nessas condições: todas as homotetias atrás indicadas; cada uma delas deixa invariante a figura, mas nem por isso «deixa invariantes as medidas», se $n\neq 0$.

O exemplo mostra duas coisas: que nem toda a transformação que conserva uma figura conserva necessariamente as distâncias e que, se na definição de *simetria* se substituísse *isometria* por *transformação,* se obteria uma condição estritamente mais abrangente do que a usada na definição usual.

É, pois, essencial, ao definir *simetria*, impor que a *aplicação* ou *transformação* em causa seja uma isometria. Se não se quiser usar logo o termo *isometria*, claro que se pode dizer «transformação *que conserva as distâncias*».