

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço de responsabilidade do Atractor relacionado com conteúdos interativos do seu site [www.atorator.pt](http://www.atorator.pt).  
Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para [atorator@atorator.pt](mailto:atorator@atorator.pt).

## DINÂMICA DE UM TRUQUE

Caro leitor: Pense num número natural  $abc$  com três dígitos, sendo  $a \neq c$ . Depois, secretamente, inverta-o, obtendo  $cba$ , e calcule a diferença do maior pelo menor. Bastará agora que nos indique o primeiro dígito dessa diferença para lhe revelarmos o resultado.

Descobrimos por que funciona o truque anterior se o experimentarmos. Por exemplo, se  $abc = 165$ , então  $cba = 561$  e  $cba - abc = 396$ ; se  $abc = 990$ , então  $cba = 099$  e  $abc - cba = 891$ ; em geral, nas condições pedidas pelo truque, a diferença  $abc - cba$  (ou  $cba - abc$ ) é sempre um número da forma  $\alpha 9\beta$  e, além disso, tem-se  $\alpha + \beta = 9$ ; daí que, conhecendo  $\alpha$ , sabemos qual é o número.

O valor de  $\alpha + \beta$  não nos surpreende: uma vez que um número e a sua versão invertida têm a mesma soma dos respetivos dígitos, eles estão na mesma classe de congruência módulo 9 e, portanto, a diferença entre eles é um múltiplo de 9. A imagem da transformação  $f$ , que atua no conjunto  $N_3$  dos números naturais com três dígitos (permitindo-se zeros à esquerda) e que a cada número associa a distância dele para a sua versão invertida, contém apenas dez elementos, nomeadamente

{000, 099, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891}.

Note-se ainda que, como o domínio da função  $f$  é finito, se iterarmos  $f$ , obtendo para cada  $x$  de  $N_3$  a respetiva órbita por  $f$ , temos de chegar a um ciclo, cujos elementos estão na imagem da função  $f$ . Dos dez números anteriores, 000 é um ponto fixo de  $f$ , que atrai todos os números  $abc$  com  $a = c$ ; e

099  $\rightarrow$  891  $\rightarrow$  693  $\rightarrow$  297  $\rightarrow$  495

é um ciclo de período 5 a que chegam todas as outras órbitas em não mais do que duas iterações de  $f$ . (ver figura 1 na página seguinte).

Poderíamos ter começado por considerar uma transformação  $f_1$  análoga a  $f$  mas a atuar no conjunto  $N_1$  de núme-

ros naturais com dízimas de um dígito: nesse caso,  $f_1$  envia cada número no ponto fixo 0. No conjunto  $N_2$  de números naturais com dois dígitos, além do ponto fixo 00 a aplicação  $f_2$  tem um ciclo de período 5

09  $\rightarrow$  81  $\rightarrow$  63  $\rightarrow$  27  $\rightarrow$  45

a que chegam todos os números  $ab$  com  $a \neq b$  em um ou dois iterados de  $f_2$ . Observe-se que este ciclo está relacionado com o ciclo de igual período em  $N_3$ : o de três dígitos obtém-se deste colocando um 9 no meio de cada número. A figura 2 (na página seguinte) ilustra a dinâmica de  $f_2$ .

Que propriedades tem este sistema dinâmico quando consideramos números com quatro ou mais dígitos? Seja  $N_D$  o conjunto de naturais com  $D$  dígitos de  $\{0,1,\dots,9\}$ , permitindo-se zeros à esquerda; e seja  $i_D : N_D \rightarrow N_D$  a função definida da seguinte forma: a 0 associa 0 e a cada  $x$  não nulo de  $N_D$ , escrito na base 10 e representado por  $D$  dígitos  $x = x_{D-1} \dots x_m x_{m-1} \dots x_1 x_0$ , com  $m = \text{máximo} \{i : 0 \leq i \leq D-1 \text{ e } x_i \neq 0\}$ , associa o natural  $i_D(x) = x_0 x_1 \dots x_{m-1} x_m \dots x_{D-1}$  obtido invertendo a ordem dos dígitos de  $x$ .

Se  $f_D$  designa a função  $N_D \rightarrow N_D$  definida por  $f_D(x) = |x - i_D(x)|$ , todos os números da imagem de  $f_D$  são múltiplos de 9 (e, quando  $D$  é ímpar, são simultaneamente múltiplos de 9 e de 11).

De facto, essa imagem reduz-se a  $(19^{D/2} + 1)/2$  elementos se  $D$  é par, e a  $(19^{(D-1)/2} + 1)/2$  se  $D$  é ímpar. Além disso, como  $N_D$  é finito, cada órbita de  $f_D$  tem de terminar num ciclo cujos elementos estão na imagem de  $f_D$ .

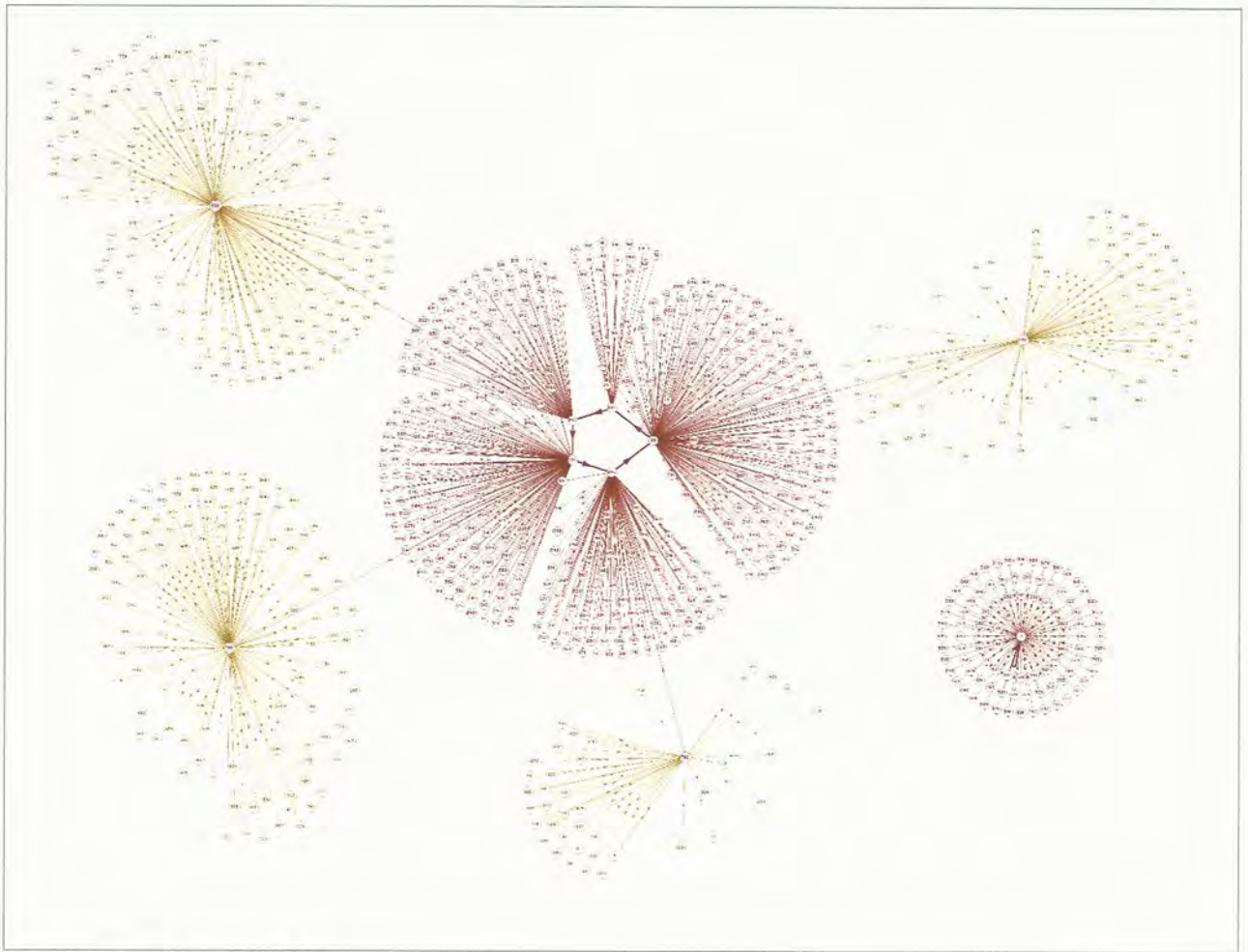


Figura 1. Ciclos e pré-ciclos em  $N_3$ .

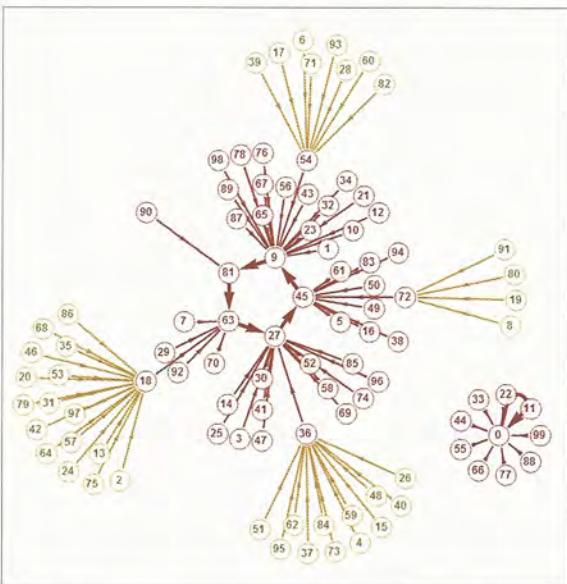


Figura 2. Ciclos e pré-ciclos em  $N_2$ .

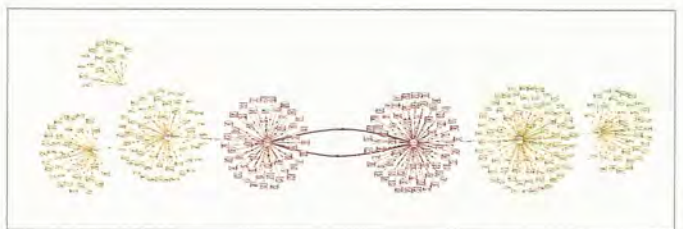


Figura 3. Ciclo de período 2 de  $N_4$  com as suas pré-imagens.

$D$	N.º de ciclos	Períodos	Pré-período máximo	[Período; Número de ciclos por período]
1	1	1	1	[1; 1]
2	2	1, 5	2	[1; 1], [5; 1]
3	2	1, 5	2	[1; 1], [5; 1]
4	5	1, 2, 5	12	[1; 1], [2; 1], [5; 3]
5	5	1, 2, 5	12	[1; 1], [2; 1], [5; 3]
6	12	1, 2, 5, 9, 18	47	[1; 1], [2; 2], [5; 7] [9; 1], [18; 1]
7	12	1, 2, 5, 9, 18	47	[1; 1], [2; 2], [5; 7] [9; 1], [18; 1]
8	26	1, 2, 5, 9, 10, 14, 18		[1; 1], [2; 4], [5; 15], [9; 2], [10; 1], [14; 1], [18; 2]
9	26	1, 2, 5, 9, 10, 14, 18		[1; 1], [2; 4], [5; 15], [9; 2], [10; 1], [14; 1], [18; 2]
10	49	1, 2, 5, 9, 10, 14, 18		[1; 1], [2; 7], [5; 31] [9; 3], [10; 2], [14; 2], [18; 3]
11	49	1, 2, 5, 9, 10, 14, 18		[1; 1], [2; 7], [5; 31], [9; 3], [10; 2], [14; 2], [18; 3]

Tabela 1

A tabela 1 reúne alguma informação sobre a dinâmica de  $f_D$  para  $1 \leq D \leq 11$ : quantos ciclos tem, os respetivos períodos e, para  $1 \leq D \leq 7$ , os pré-períodos máximos.

Em [1], encontram-se algumas figuras que ilustram a dinâmica de  $f_D$  para estes valores de  $D$ ; e pode ler-se uma descrição mais completa de algumas propriedades destas dinâmicas.

Analisemos agora os dados da tabela 2, que contém os ciclos de  $f_D$ , para  $1 \leq D \leq 6$ . Notamos aqui alguns padrões. Para cada natural  $D$ , a aplicação  $f_D$  só tem um ponto fixo. Se  $D > 1$  é ímpar, os ciclos de  $N_D$  surgem dos ciclos de  $N_{D-1}$  por um dos processos seguintes:

(a) fixamos um elemento de um ciclo de  $N_{D-1}$  e colocamos um 9 a meio (vejam-se, por exemplo, os ciclos {2178, 6534} de  $D = 4$  e {21978, 65934} de  $N_5$ ); ou

(b) fixamos um elemento de um ciclo de  $N_{D-1}$  e acrescentamos um 0 na posição central (é, por exemplo, essa a relação entre os ciclos {09009, 81081, 63063, 27027, 45045} de  $D = 5$  e {0909, 8181, 6363, 2727, 4545} de  $N_4$ ).

Estes procedimentos não alteram o período do ciclo, mas nem todas as possibilidades produzem ciclos (por exemplo, 09909 não pertence a nenhum ciclo de  $N_5$ ). Pode ler-se em [1] por que é válida esta propriedade para todo o  $D > 1$  ímpar.

Para  $D$  par, parece haver maior variedade de meios para se formarem os ciclos de  $N_D$ . Por exemplo, podemos fixar um elemento de um ciclo de  $N_{D-2}$  e colocar um zero em cada topo (como em {0090, 0810, 0630, 0270, 0450} quando  $D = 4$ ); ou escolher um elemento de um ciclo de  $N_{D/2}$  e repeti-lo duas vezes (veja-se o ciclo {0909, 8181, 6363, 2727, 4545}, quando  $D = 4$ ); ou selecionar ciclos de valores de  $D$  menores e juntá-los depois de uma permutação conveniente (como no ciclo {978021, 857142, 615384, 131868, 736263, 373626, 252747, 494505, 010989} de  $D = 6 = 2 + 4$ , cujo primeiro elemento resulta de uma tal união entre os ciclos {09, 81, 63, 27, 45} de  $N_2$  e {2178, 6534} de  $N_4$ ).

A lista de procedimentos detetados para  $1 \leq D \leq 12$  é extensa (veja-se [1]) e alguns deles geram ciclos com períodos novos relativamente aos já obtidos para valores menores de  $D$ . O programa elaborado pelo Atractor para calcular os ciclos de  $f_D$  demorou centésimas de segundo para fornecer a lista completa dessas órbitas especiais quando  $2 \leq D \leq 4$ ; gastou poucos segundos para  $D = 6$  e cerca de dois minutos para  $D = 8$ . Quando se fixou  $D = 12$ , porém, o tempo previsto subiu para cerca de um ano (embora, usando amostras ao acaso de elementos da imagem de  $f_{12}$ , a busca de ciclos tenha sido mais rápida). Fica, por isso, o desafio de se provarem, para  $D \geq 12$  e sem recurso ao computador, algumas das propriedades detetadas nas dinâmicas anteriores.

D	Per <sup>o</sup>	Ciclos em $N_D$	D	Per <sup>o</sup>	Ciclos em $N_D$
1	1	{0}	6	1	{000000}
2	1	{00}		2	{219978, 659934}
	5	{09, 81, 63, 27, 45}			{021780, 065340}
3	1	{000}		5	{099999, 899991, 699993, 299997, 499995}
	5	{099, 891, 693, 297, 495}			{090009, 810081, 630063, 270027, 450045}
4	1	{0000}		5	{009990, 089910, 069930, 029970, 049950}
	2	{2178, 6534}			{000900, 008100, 006300, 002700, 004500}
	5	{0999, 8991, 6993, 2997, 4995}			{009090, 081810, 063630, 027270, 045450}
		{0090, 0810, 0630, 0270, 0450}			{090909, 818181, 636363, 272727, 454545}
5	1	{00000}		9	{978021, 857142, 615384, 131868, 736263, 373626, 252747, 494505, 010989}
	2	{21978, 65934}			{043659, 912681, 726462, 461835, 076329, 847341,
	5	{09999, 89991, 69993, 29997, 49995}		18	703593, 308286, 374517, 340956, 318087, 462726, 164538, 670923, 341847, 406296, 286308, 517374}
		{09009, 81081, 63063, 27027, 45045}			
	5	{00990, 08910, 06930, 02970, 04950}			

Tabela 2

A transformação  $f_D$  pode ser considerada como atuando nos naturais quando representados numa outra base que não 10 (designemo-la por  $f_{D,base}$ ), esperando-se dinâmicas distintas, uma vez que o comportamento das órbitas de  $f_{D,base}$  depende dos dígitos permitidos na representação dos naturais. Por exemplo, na base 2 e para  $D = 4$ , a imagem de uma tal transformação  $f_{4,2}$  contém cinco números e há quatro ciclos fixos, nomeadamente {0000}, {0010}, {0101}, {0111}; e são apenas estes os atratores de  $f_{4,2}$ . Mais geralmente, nesta base e para todos os valores de  $D$  par, há  $2^{D/2}$  pontos fixos (e conjectura-se que são apenas esses os atratores de  $f_{D,2}$ ). Em base 3 e para  $D = 6$ , encontramos três pontos fixos ({000000}, {010120}, {102212})

e uma órbita de período 2 ({010212, 201021}), e só estes ciclos. Em [1] prova-se que, para algum  $D$ ,  $f_{D,B}$  tem pontos fixos não nulos se e só se  $B$  for não congruente com 1 módulo 3. Um ponto fixo de  $f_{2,B}$  é  $((B-2)/3, (2B-1)/3)_B$  se  $B$  é congruente com 2 módulo 3; um ponto fixo de  $f_{4,B}$  é  $(B/3, B/3-1, 2B/3-1, 2B/3)_B$ , se  $B$  for múltiplo de 3.

Em [1] encontram-se mais dados sobre estas e outras bases, alguns dos quais obtidos através de applets interativos que o leitor é convidado a explorar.

## REFERÊNCIAS

- [1] [www.atractor.pt/mat/ABC-CBA](http://www.atractor.pt/mat/ABC-CBA)

