No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu site *www.atractor.pt* .
Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

FORMAÇÃO MATEMÁTICA DE NADADORES-SALVADORES

Este é o primeiro de dois artigos dedicados ao Ano Mundial da Luz.

Imaginemos o seguinte cenário: num pedaço de costa retilínea e sem corrente, um banhista pede socorro e o nadador-salvador, suposto em terra, dirige-se para o salvar. Que percurso deve seguir para demorar o mínimo tempo possível? Claro que a resposta depende à partida das velocidades, de corrida em terra e de natação na água, do nadador-salvador. No caso de elas serem iguais, o que em geral está longe de acontecer, o percurso mais rápido coincide com o percurso mais curto e, portanto, é o segmento de reta que une a posição inicial do nadador-salvador à do banhista. Mas, em geral, a velocidade de corrida é francamente superior à de natação. Neste caso, ainda há uma situação particular em que a resposta é a mesma: aquela em que a linha reta unindo o banhista ao nadador-salvador é perpendicular à linha de costa. E nos outros casos? Um pouco de bom senso aconselha a que se *aumente o percurso em terra, onde a velocidade é grande, para depois ser mais pequeno o percurso em água, onde a velocidade é mais pequena*.

Mas como determinar com precisão o melhor ponto C na linha de costa, onde fazer a transição da corrida para a natação? Outra questão: temos estado a supor que o nadador-salvador estava em terra quando o banhista fez o apelo. À primeira vista, poderá pensar-se que, se ele já estiver na água, a melhor solução será a de nadar em linha reta na direção do banhista em apuros. Mas será necessariamente esse o caminho mais rápido?

Por uma questão de simplicidade, começaremos por tratar um caso particular: o nadador salvador A está mesmo

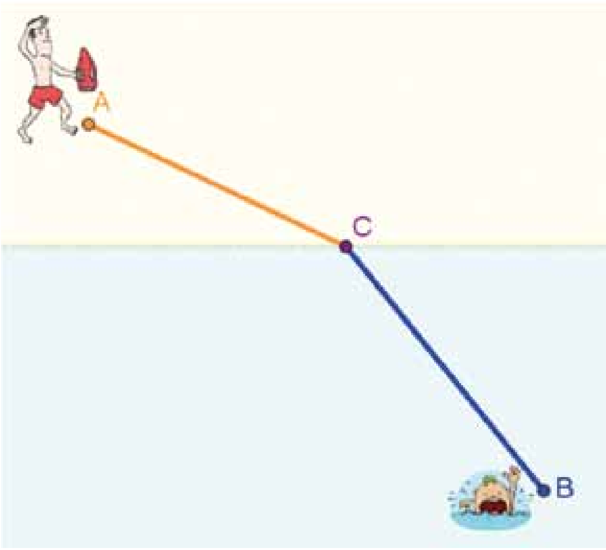

Figura 1

na linha de água e começa por correr ao longo dela até um ponto C, nadando depois em direção ao náufrago B. Como escolher C, de forma a que ACB seja o percurso mais rápido? Designemos por v_1 a velocidade de corrida e por $v_2 (< v_1)$ a velocidade de natação. Queremos C tal que (ver figura 2), para quaisquer pontos na linha de água, D à direita de C e E à esquerda de C, os percursos ADB e AEB sejam mais demorados do que o percurso ACB. F é o ponto da linha de água

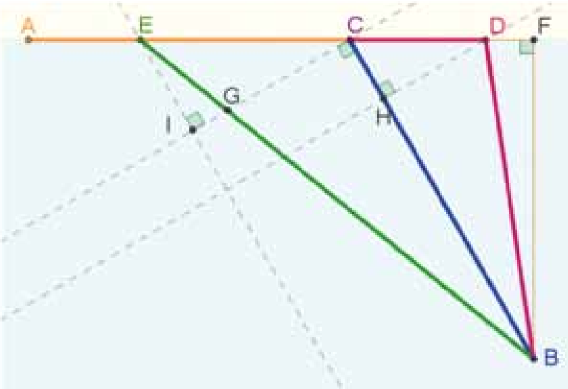

Figura 2

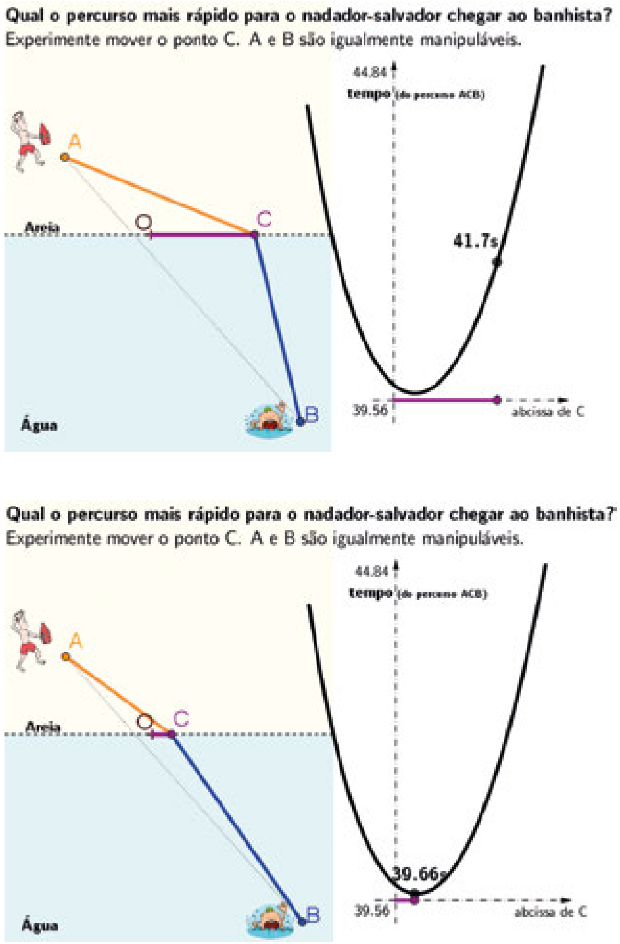

Figura 3.

na perpendicular por B e a tracejado estão representadas as perpendiculares por C e D a CB e a paralela a CB por E, sendo G, H, I pontos de interseção claramente identificáveis na figura. O tempo do percurso ACB é $\overline{AC}/v_1 + \overline{CB}/v_2$. O de ADB é $\overline{AD}/v_1 + \overline{DB}/v_2$ e ele tem uma parte AC comum a ACB. Queremos encontrar uma condição sobre C que garanta que CB é mais rápido do que CDB para qualquer D à direita. Ora, HB é mais rápido do que DB: estão no mesmo meio, portanto, a velocidade é a mesma, e DB é hipotenusa de um triângulo de que HB é cateto, portanto, mais longa do que HB. Se a duração de $CH (= \overline{CH}/v_2)$ for inferior ou igual à de $CD (= \overline{CD}/v_1)$, poderemos concluir que o percurso CB é mais rápido do que CDB. Mas $\overline{CH}/v_2 \leq \overline{CD}/v_1$ equivale a $\overline{CH}/\overline{CD} \leq v_2/v_1$. E o triângulo CHD é semelhante ao triângulo CFB (são ambos retângulos e têm um ângulo agudo comum). Portanto, podemos afirmar que, se a "inclinação" de CB relativamente à linha de água, medida por $\overline{CF}/\overline{CB}$, for menor ou igual a v_2/v_1, então o percurso ADB é mais demorado do que o percurso ACB. Um raciocínio análogo, agora aplicado a AEB e tendo em conta que o triângulo retângulo EIC é também semelhante a CFB, permite concluir que, se $\overline{CF}/\overline{CB}$ for maior ou igual a v_2/v_1, o percurso ACB é mais rápido do que AEB. Podemos então concluir que, se $\overline{CF}/\overline{CB}$ for exatamente v_2/v_1[1], então o percurso por C é mais rápido do que os que estão à direita ou à esquerda! Este caso particular, em que A está na linha de água fica, pois, resolvido. No caso de A estar acima da linha de água, poderíamos proceder de modo análogo, mas agora relacionando a "inclinação" de CB com a de AC. Vamos, porém, observar e ter em conta as imagens seguintes[2].

Na aplicação correspondente às duas imagens da figura 3, para uma dada escolha das velocidades de corrida e de natação, ao deslocar C pode ver o tempo que o nadador-salvador leva a chegar ao banhista, para cada uma das escolhas de C na linha de costa; e, portanto, consegue determinar aproximadamente a melhor posição para o ponto C, isto é, aquela que define o trajeto mais rápido.

Sejam D e E os pontos da linha de costa mais próximos, respetivamente, de A e de B. A razão entre as distâncias do ponto C, a D e a A, mede o grau de afastamento do percurso na areia, relativamente à perpendicular à linha de costa; e, analogamente para a razão entre as distâncias de C, a E e a B, no percurso em água. Na figura 4, estão ainda representadas: a vermelho, o quociente entre aquelas duas razões, variável com a posição do ponto C, e a verde, o quociente entre as velocidades de corrida e de natação, este independente da posição de C (e das de A e B).

Deslocando o ponto C, é possível observar que o percurso ótimo, correspondente ao mínimo de tempo (curva a preto) parece obter-se quando as razões das inclinações e das velocidades são iguais, o que se verifica se a abcissa de C for a do

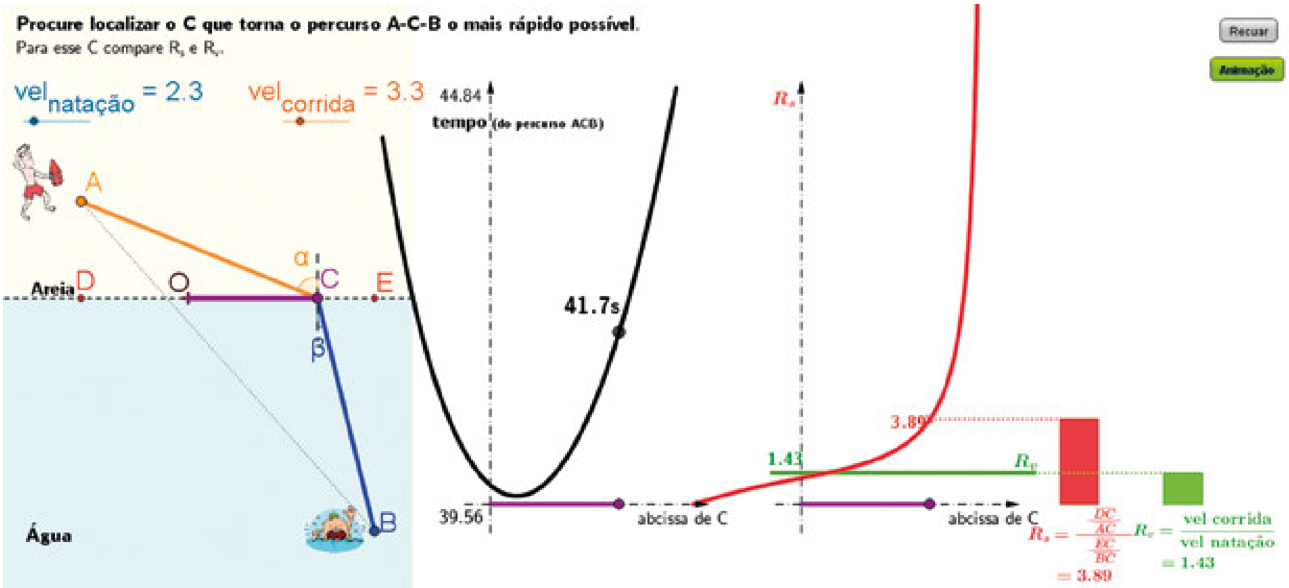

Figura 4

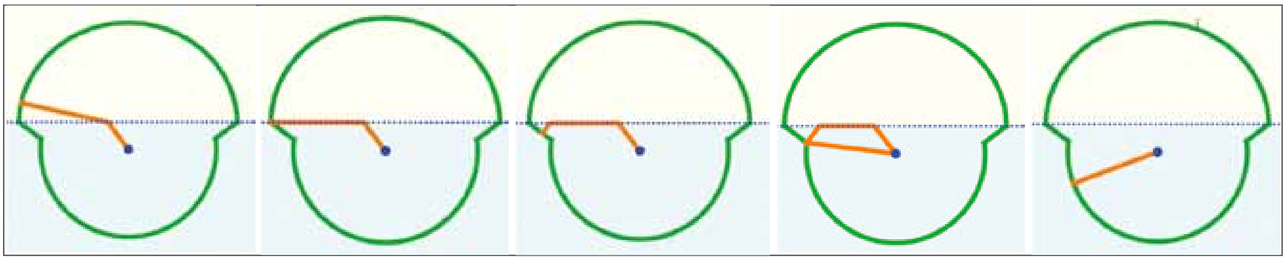

Figura 5

ponto de interseção dos gráficos a verde e a vermelho. Realmente, o melhor percurso é aquele em que há igualdade entre as duas razões[3].

Chamemos "circunferência temporal" de raio t, centrada no banhista, ao conjunto de todos os pontos de onde o nadador-salvador consegue atingir o banhista em exatamente o mesmo tempo t. Será que a forma da figura obtida[4] depende do "raio" t? Tratando esta questão num enquadramento um pouco diferente do que temos vindo a considerar (isto é, nadador-salvador em terra), agora consideraremos também a possibilidade de ele já estar na água.

Na figura 5, a "circunferência temporal" é constituída por um arco de circunferência (na água), dois segmentos de reta unindo os extremos desse arco à linha de costa e uma curva em terra. Na imagem do meio, o percurso mais rápido é formado por três segmentos de reta; um perpendicular ao segmento exterior, outro na linha de costa e o terceiro unindo o anterior à posição do banhista. Portanto, era errada a conjetura anterior, de que estando ambos na água, o melhor percurso era sempre o de um segmento retilíneo, como na imagem 5 da figura 5. Aliás, a solução encontrada é natural, pois se ambos estiverem perto da linha de terra, mas muito longe entre si, compensa ao nadador-salvador

1 O que é equivalente a v_2/(inclinação de CB) ser igual a v_1. Note-se que esta condição só aparentemente é assimétrica relativamente a v_1 e v_2, porque v_1 também se pode escrever como v_1/(inclinação de AC), por, neste caso particular em que A está na linha de água, a inclinação de AC ser 1.

2 Em [1] encontrará várias aplicações interativas, feitas com o Geogebra e com o Mathematica, das quais são extraídas as figuras que ilustram este texto.

3 Um leitor conhecedor de funções trigonométricas e de uns rudimentos de cálculo diferencial poderá pensar numa demonstração curta desta propriedade. No portal do Atractor [1], poderá ver uma demonstração geométrica, exigindo menos conhecimentos matemáticos e que, no fundo, é uma extensão dos argumentos usados no caso particular anterior.

4 Em [1] encontra uma aplicação interactiva (*CDF*) que lhe dá essa "circunferência" para diferentes valores de t e, para cada uma delas e cada um dos seus pontos, permite desenhar percursos ótimos "radiais" dele até ao banhista, usualmente um, excecionalmente dois.

nadar até terra, correr ao longo da costa e depois voltar a entrar na água em direção ao banhista. Finalmente, notemos que na posição correspondente à quarta imagem há dois percursos mínimos possíveis, partindo do mesmo ponto!

Vamos agora encarar um problema semelhante, mas que, contrariamente ao anterior, não é representável adequadamente num plano, exigindo uma representação no espaço. Imaginemos um lago, onde há peixes, nadando a diversas profundidades, e sobre o qual voam aves a diferentes altitudes. E imaginemos[5] que essas aves fazem voos picados, mergulhando na água para pescar os peixes. Qual

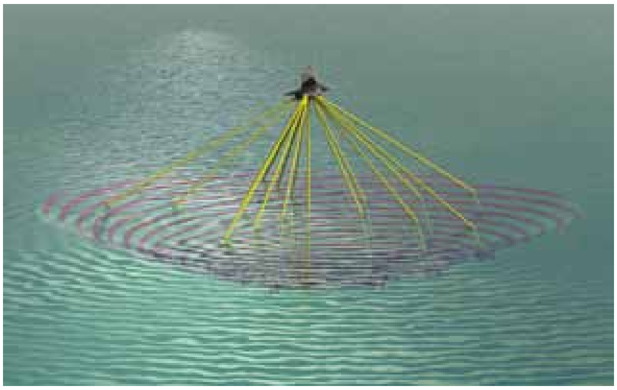

Figura 6

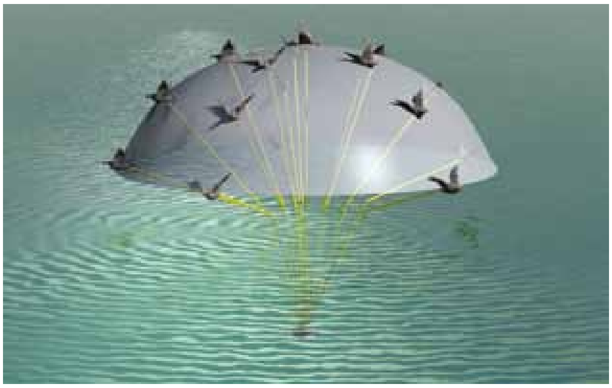

Figura 7

a melhor escolha possível de percurso para a ave? Se supusermos que a velocidade de voo (no ar) é constante[6] e superior à de mergulho (na água), também constante, temos um problema matemático muito semelhante ao anterior: para cada par de posições, da ave e do peixe, restringindo-nos ao plano vertical contendo essas posições, obtemos exatamente o problema anterior. Para uma certa posição da ave, a figura 6 representa diversos percursos para chegar a diferentes peixes, estando também representada uma superfície, que poderíamos designar por "temporalmente esférica", formada pelos pontos na água aos quais a ave chega num dado tempo (o mesmo para todos). De algum modo, permitiria à ave determinar quais os peixes que conseguiria alcançar em menos tempo. Analogamente, a superfície da figura 7 permitiria ao peixe saber quais as aves que mais o ameaçam, por poderem chegar em menos tempo.

Alguns leitores que nos acompanharam até aqui poderão interrogar-se sobre a relação do problema tratado com o subtítulo do artigo, que contém uma referência à luz. A relação é simples de enunciar: quando a luz percorre um meio diferente do vazio, a sua velocidade de propagação é diferente e depende do meio. E o percurso de um raio luminoso que parte de um ponto A e passa por outro ponto B tem uma forma tal que minimiza[7] o tempo de percurso (princípio de Fermat). Por exemplo, a velocidade de propagação da luz é, no ar, bastante superior à que tem lugar na água. Então, o raio luminoso tem uma alteração de direção na superfície dos dois meios, com ângulos satisfazendo a condição atrás deduzida. À relação entre as velocidades de propagação da luz, no ar e na água, chama-se índice de refração da água relativamente ao ar.

A figura 8 mostra três fotos, tiradas exatamente do mesmo ponto de vista, de uma caneca com uma moeda no fundo, quase totalmente não visível na primeira e que é progressivamente tornada visível quando a caneca é enchida com água[8].

Figura 8

Figura 9

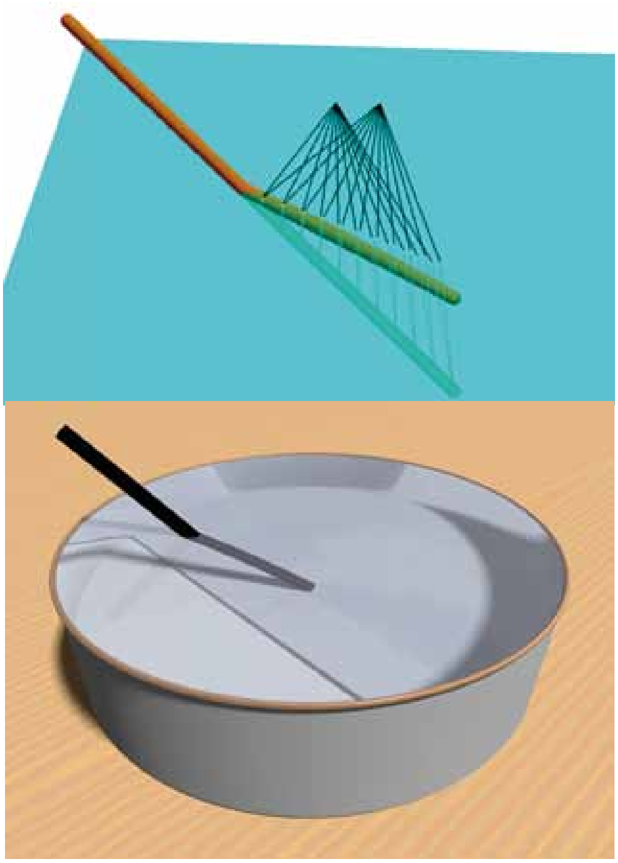

Figura 10

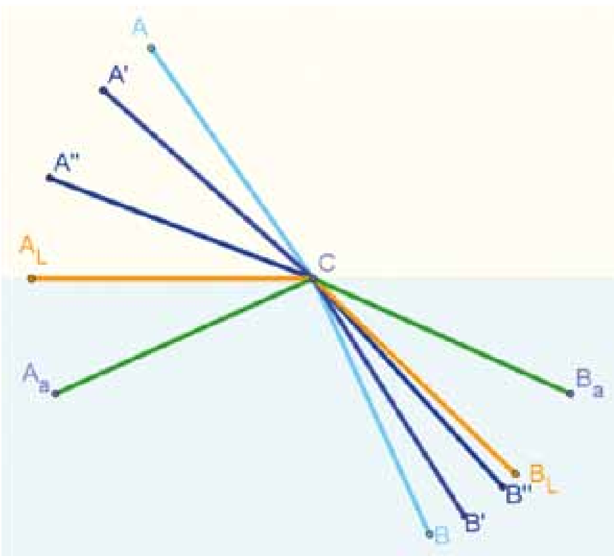

Figura 11

A explicação para o fenómeno ilustrado na figura 8 reside precisamente na mudança de direção que os raios luminosos partindo da moeda sofrem quando chegam à superfície da água.

E é uma explicação do mesmo tipo que está na base de outro fenómeno representado na foto da figura 9: a aparente quebra de uma haste cilíndrica perfeitamente direita, quando é mergulhada na água. O esquema representado na primeira imagem da figura 10 permite compreender a aparente quebra que se vê na segunda imagem e ainda verificar que a parte mergulhada não é vista como rigorosamente retilínea, como poderia parecer numa primeira observação[9].

Terminamos com a referência a um exemplo que põe em evidência um comportamento qualitativamente diferente. A figura 11 mostra (em diferentes tons de azul) três percursos passando por um mesmo ponto C situado na linha de separação dos dois meios. Cada um deles corresponde a duas situações possíveis, assim descritas nos casos de A e B: ver a partir de A o ponto B, aparentemente na direção AC, ou, para um observador mergulhado na água, ver a partir de B o ponto A, aparentemente na direção de BC. Quando A se aproxima da linha de separação dos dois meios, B aproxima-se de uma semirreta limite, fazendo um ângulo de desvio máximo, representado a laranja. O que acontecerá a um raio luminoso emitido de B_a numa direção com inclinação superior à dessa semirreta CB_L? Não pode atravessar a superfície de separação dos meios de maneira a satisfazer a condição que enunciámos! Na verdade, esse raio reflete-se segundo um raio CA_a, como indicado (a verde) na mesma figura 11. O raio refletido faz o mesmo ângulo com o meio de separação e é, portanto, também superior ao de desvio máximo. Assim, tal como

[5] Este cenário não é fantasista, pelo contrário, é observável facilmente em certos contextos.

[6] Por uma questão de simplicidade do modelo, não estamos a tomar em conta variações de velocidade dependentes da direção do voo, que deviam ser tomadas em conta atendendo à ação de gravidade, e estamos também a supor que o peixe não mudou de posição durante todo o voo-mergulho da ave e que não há vento no ar nem corrente na água.

[7] Nos exemplos dados, o percurso total é realmente minimizado, mas o que se pode afirmar com generalidade é que o percurso seguido pela luz minimiza localmente o tempo gasto, isto é, minimiza-o relativamente a todos os percursos suficientemente próximos.

[8] Ver filme do enchimento da caneca com água em [1].

[9] Para mais detalhes e uma manipulação de uma aplicação interativa que permite modificar alguns parâmetros e observar os comportamentos resultantes dessas modificações, ver [1].

Figura 12

no caso anterior, o mesmo percurso pode representar um observador em A_a a ver um objeto em B_a, aparentemente na direção de A_aC, ou um observador em B_a, a ver um objeto em A_a, aparentemente na direção de B_aC. Mas há uma diferença fundamental relativamente à situação anterior: aqui, a imagem obtida tem a orientação trocada relativamente à do original.

Este fenómeno, dito de reflexão total, é posto em evidência nas imagens da figura 12. O recipiente representado na primeira imagem está cheio com água e a segunda imagem mostra a visão a partir de um observador mergulhado na água, olhando para o letreiro colado na parte lateral desse recipiente.

REFERÊNCIAS

[1] *http://www.atractor.pt/mat/luz1*.