

COMPARANDO DOIS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Evocaremos aqui um célebre problema de geometria proposto por Jakob Steiner e compará-lo-emos com um outro, que é usual designar por Hexlet. Como veremos, as respostas a ambos utilizam, na demonstração, ideias e ferramentas análogas. No entanto, mesmo após o conhecimento da resposta ao primeiro e da sua justificação, a resposta ao segundo é, em geral, uma surpresa.

O *Porisma de Steiner* tem a ver com o seguinte: fixado um par de circunferências¹ disjuntas no plano, será sempre possível construir uma sucessão finita de $n \geq 3$ circunferências, todas tangentes às duas iniciais, e tal que cada uma das novas seja tangente à anterior e a última seja tangente não só à anterior mas também à primeira²?

A primeira figura mostra uma escolha do par inicial em que é possível. Da segunda figura não concluímos nada imediatamente: começando pela circunferência azul-clara dessa figura, o anel não fecha, mas *a priori* poderíamos imaginar que, para uma posição diferente da circunferência inicial do anel, o novo anel já fechasse (ver figura 3). Note-se que as duas circunferências do par inicial podem ser exteriores – é o caso das figuras 4 e 5: na primeira, as do anel também são exteriores, na segunda uma das do anel envolve todas. Mas há um caso particular, o de as duas circunferências iniciais serem concêntricas (ver figuras 6, 7, 8, 9), em que po-



Figura 1

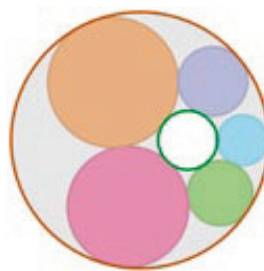


Figura 2

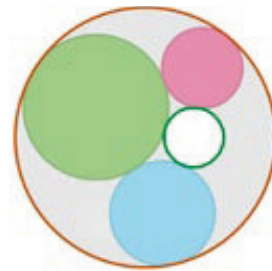


Figura 3

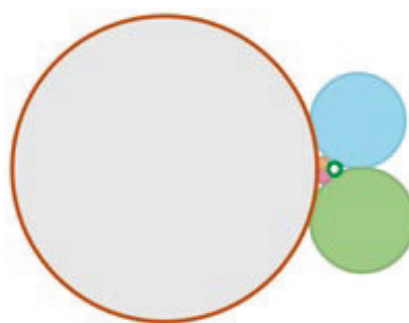


Figura 4

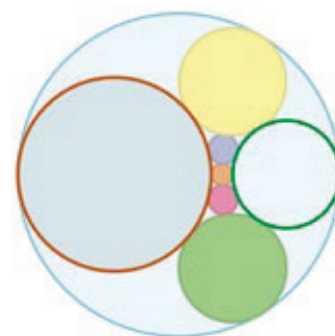


Figura 5

¹ Representadas com as cores castanha e verde escura nas figuras 1 a 3.

² Neste texto, estamos a supor que só os pontos de tangência estão em mais do que uma circunferência da sucessão. Em [2] existe um *applet* em que é possível construir sucessões sem esta condição: elas podem fechar ao fim de mais de uma volta.



Figura 6



Figura 7



Figura 8



Figura 9

demos claramente concluir que, se um anel fecha (respetivamente não fecha), qualquer outro anel fecha (respetivamente não fecha). E, quando as circunferências são concêntricas, é fácil concluir que “os anéis fecharem ou não” depende apenas da razão dos raios. Trigonometria elementar permite encontrar as razões correspondentes aos anéis que fecham. A tabela mostra valores aproximados das primeiras 25, obtidos usando a fórmula

$$\text{razão dos raios} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Portanto, já temos uma resposta ao problema, tal como foi proposto: nem sempre há um anel que feche e basta escolher como contraexemplo o par de circunferências concêntricas representado nas figuras 6 e 7. O que fizemos até agora sugere outra questão interessante: haverá algum par de circunferências iniciais, em que o anel feche para certa escolha da primeira circunferência do anel e não feche para outra escolha (da primeira circunferência)? Esta é uma questão que não parece fácil de abordar. Notemos, porém, que, pelo que escrevemos anteriormente, a haver um tal par de circunferências iniciais, elas serão necessariamente não concêntricas. Seria ótimo se pudéssemos reduzir o caso geral ao caso particular das circunferências concêntricas, em que a resposta é

ANÉIS FECHADOS

N.º de circ.	Razão de raios
3	13.92820323
4	5.828427125
5	3.851839996
6	3
7	2.532843231
8	2.239828809
9	2.039606729
10	1.894427191
11	1.784478148
12	1.698396372
13	1.629211496
14	1.572416528
15	1.524970987
16	1.484750842
17	1.450228262
18	1.420276625
19	1.394047222
20	1.370888706
21	1.350292994
22	1.331857993
23	1.315261385
24	1.300241804
25	1.286585105

Tabela

conhecida. Como tentar? Convir-nos-ia uma transformação geométrica que enviasse circunferências em circunferências e conservasse a propriedade de tangência (portanto, enviando anéis de circunferências tangentes em anéis de circunferências tangentes), mas não conservasse (necessariamente) a propriedade “ser concêntrico”. Ora, uma tal transformação existe: uma inversão³, cujo centro não pertença a nenhuma das circunferências.

Assim, por exemplo, os anéis de circunferências concêntricas representados nas figuras 10-11 e 12-13 são enviados por inversões em anéis de circunferências não concêntricas representados nas figuras correspondentes. Num caso ambos os anéis fecham; noutra ambos não fecham. Mas o que é

inesperado é que, naqueles dois exemplos de anéis de circunferências não concêntricas, tal como nos das circunferências concêntricas, o anel fechar ou não fechar não depende da posição da primeira circunferência do anel. Podemos acrescentar: aquele comportamento – “o anel fechar ou não” não depender da primeira circunferência escolhida – é não só o dos pares de circunferências concêntricas, como o de todos os pares de circunferências provindo por uma inversão de um par de circunferências concêntricas! Então, agora a questão interessante é a de saber se, dado qualquer par de circunferências disjuntas, ele poderá ser obtido por uma inversão de um par de circunferências concêntricas. Se a resposta for afirmativa, teremos concluído que o comportamento, para qualquer par de circunferências disjuntas, é o mesmo que para os pares de circunferências concêntricas: haverá pares para os quais nenhum anel fecha (é a situação genérica) e pares excepcionais⁴ para os quais todos os anéis fecham⁵! Neste ponto, sugerimos aos leitores com alguma experiência em trabalhar com inversões que tentem diretamente provar que qualquer par de circunferências disjuntas provém de um par de circunferências concêntricas, o que é o mesmo que provar que dado qualquer par de circunferências disjuntas, há uma inversão que o transforma num par de circunferências concêntricas. Quem não quiser seguir a sugestão poderá encontrar no que se segue uma prova (ilustrada na figura 14) não construtiva⁶ da existência de uma tal inversão. Note que há uma grande variedade de inversões que produzem o resultado desejado. Imporemos algumas condições suplementares que restringem as inversões a considerar.

Se A e B são os centros das duas circunferências a e b , vamos escolher uma inversão cujo centro esteja na reta AB . Poderemos ainda conseguir que envie b sobre si própria: basta-

³ Recorde-se que, no plano, uma inversão relativamente a uma circunferência de centro C e raio r envia qualquer ponto P diferente de C num ponto P' tal que $OP' = kOP$, onde $k = 1/r^2$. Analogamente no espaço relativamente a uma superfície esférica de centro C e raio r .

⁴ Cada um destes pares tem uma vizinhança na qual para nenhum outro par o anel fecha.

⁵ É a um problema com um desfecho deste tipo que é costume chamar “porisma”.

⁶ Uma demonstração construtiva, acompanhada por um *applet* de Geogebra, com a respetiva construção, pode ser encontrada em [1].

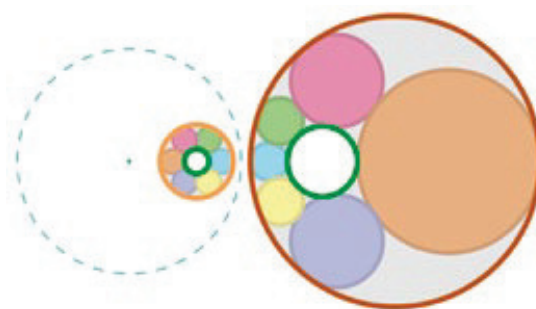


Figura 10

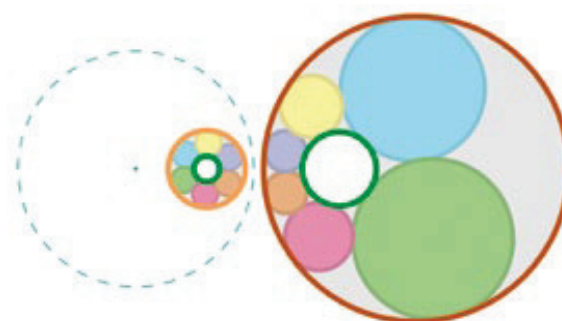


Figura 11

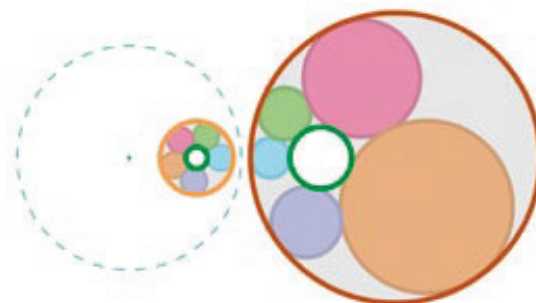


Figura 12

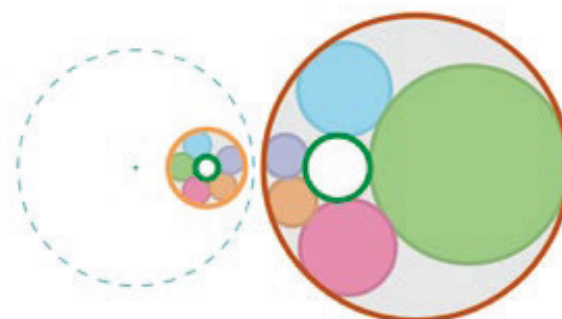


Figura 13

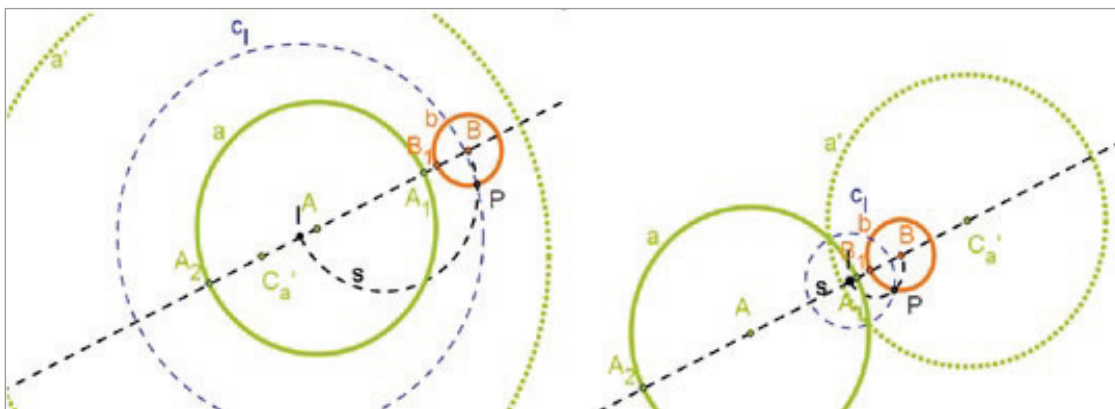


Figura 14

rá que a circunferência de inversão c_1 corte b ortogonalmente. E, para tal, se I designa o ponto que queremos para centro da inversão, há simplesmente que construir a semicircunferência s de diâmetro IB : a circunferência c_1 de centro I , passando pelo ponto P de interseção de s com b , corta b ortogonalmente em P . Quando I se desloca na reta, a inversa a' de a , representada a ponteados na figura, desloca-se e o seu centro $C_{a'}$ também. Vejamos o que sucede quando I percorre o segmento AA_1 (aberto à direita). Se $I = A$, $C_{a'} (=A)$ está francamente à esquerda de B ; e, quando I tende para A_1 , o centro $C_{a'}$ tende para infinito à direita de B . Como a função é definida e contínua naquele intervalo, há nele uma posição de I para a qual a inversa a' de a tem centro $C_{a'} = B$, isto é, essa inversão envia as duas circunferências dadas em duas circunferências a' e $b' (=b)$ concêntricas (com centro B). O raciocínio funciona de modo semelhante no caso de b ser interior a a .

Resolvido o porisma de Steiner, envolvendo certos anéis de circunferências tangentes no plano, é natural pensar se não haverá problemas de índole semelhante, envolvendo anéis de superfícies esféricas no espaço euclidiano tridimensional. É neste contexto que surge o Hexlet, que, sem ser a simples transposição do problema anterior no plano, com ele apresenta algumas semelhanças. Consideremos fixadas à partida três superfícies esféricas tangentes entre si, duas a duas, em três pontos distintos. Se acrescentarmos àquelas três uma outra superfície esférica tangente a todas elas, haverá em geral⁷, “de cada lado” desta superfície acrescentada, uma única superfície esférica, que lhe seja tangente, bem como às outras três fixadas inicialmente. A escolha da primeira vai, pois, em geral, determinar um anel de superfícies

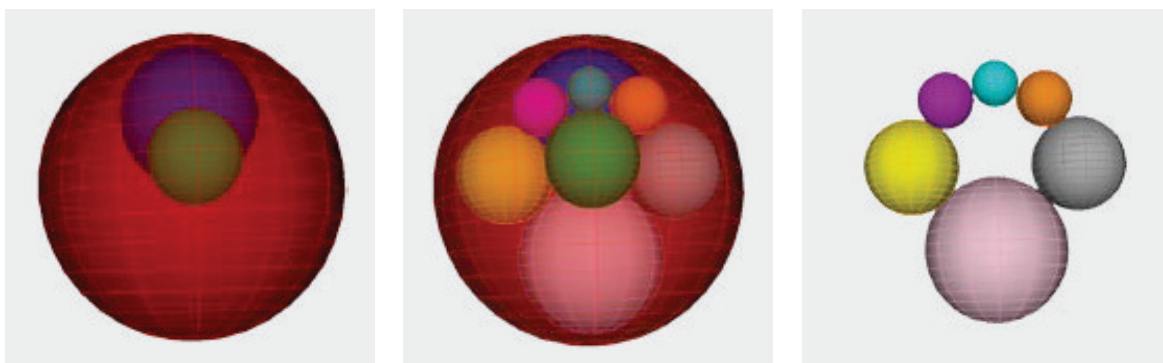
esféricas, em que cada uma é tangente à anterior e em que todas são tangentes às três fixadas à partida. Esse anel dir-se-á fechado ou aberto conforme a última seja ou não tangente à primeira. Nas figuras 15, 16 e 17 estão representados, respetivamente, um terno de superfícies esféricas – a vermelha contendo as outras duas, azul e verde –, as mesmas com um anel (fechado) de seis, e somente o mesmo anel. Nas figuras 18 e 19 estão representados, respetivamente, um terno de superfícies esféricas, agora exteriores duas a duas, e as mesmas com um anel com a superfície esférica amarela⁸ envolvendo todas as outras.

Os problemas análogos aos da situação anterior, que analisámos no plano, formulam-se agora do seguinte modo:

1. Será que há anéis que fecham e outros que não fecham?
2. “Fechar ou não” depende das posições e dos tamanhos das superfícies esféricas iniciais, mas não da posição da primeira do anel?
3. O número de superfícies esféricas de um anel que feche varia com os raios e as posições das três iniciais, mas não com a posição da primeira do anel?
4. “Não fechar” é a situação genérica e “fechar” a excecional?

Surpreendentemente, as respostas a **todas** estas perguntas são negativas! Sugere-se que o leitor não avance sem primeiro refletir sobre o que é que esta informação permite concluir...

Tal como fizemos no caso plano, tentemos ver se, usando inversão no espaço, é possível reduzir este problema geral a um caso em que as conclusões sejam simples de tirar. Proceder assim é aqui mais imediato do que no problema precedente. Basta verificar que, tomando como centro de inversão



Figuras 15 - 17 ▶

o ponto de tangência de duas das três superfícies esféricas fixadas inicialmente, essas duas são transformadas em dois planos paralelos e a terceira é transformada numa superfície esférica S tangente aos dois planos. Deixa-se ao leitor a tarefa de refletir sobre quais serão os anéis de superfícies esféricas tangentes a S e a esses dois planos (ver figura 20 e recorrer ao *applet* de [3]). Após o que, por certo, o nome Hexlet para este problema geométrico lhe parecerá natural. Na figura 21, está representado o mesmo anel de superfícies esféricas da figura 19 (correspondente ao terno da figura 18), mas observado de outro ponto de vista.

Para estes dois belos problemas, encontrará em [1] aplicações interativas (Java, Mathematica–CDF e Geogebra) com as quais poderá manipular situações e desenvolver alguma intuição geométrica.

REFERÊNCIAS

- [1] <http://www.atractor.pt/mat/SteinerHexlet>
- [2] <http://www.atractor.pt/mat/SteinerHexlet/apSteiner.html>
- [3] <http://www.atractor.pt/mat/SteinerHexlet/apHexlet.html>



Figura 18

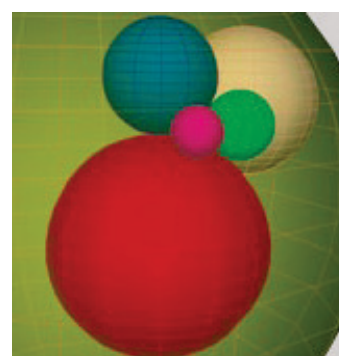


Figura 19

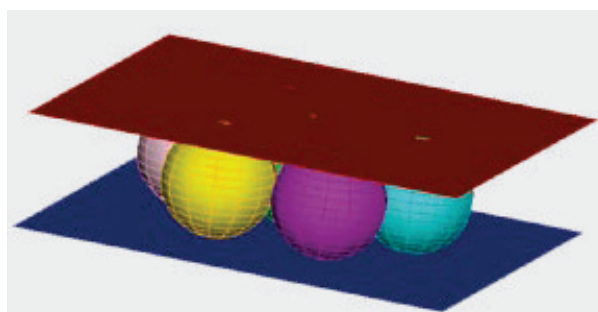


Figura 20

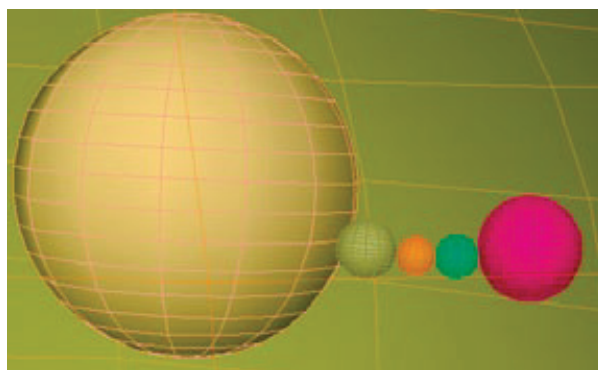


Figura 21

⁷ Na verdade, há situações-limite em que a superfície esférica "degenera" num plano.

⁸ Note que nas figuras 15, 16, 19 e 21 há uma superfície esférica colorida semi-transparente envolvendo as outras, pelo que as cores destas são um pouco alteradas na figura.