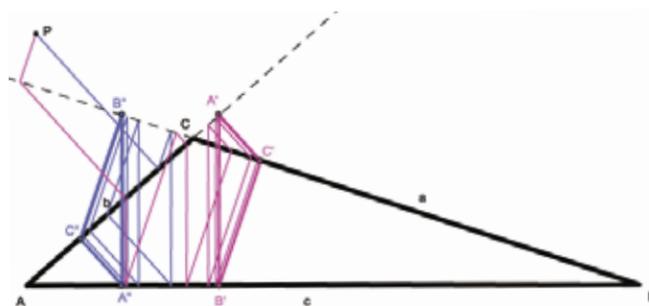
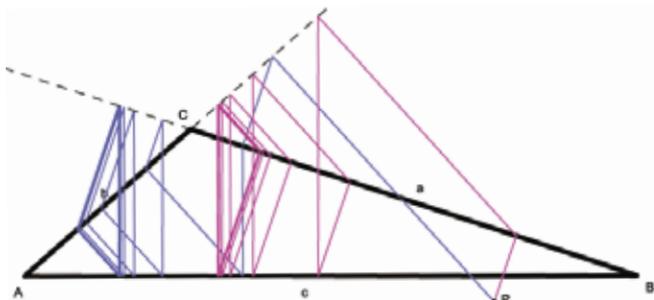


PROJECÇÕES NUM TRIÂNGULO

“Para um ser completamente imóvel, não haveria nem espaço nem geometria.”

Henri Poincaré, *O valor da Ciência* (1908)

Fixemos no plano um ponto P e um triângulo \mathcal{T} com lados a, b, c e tracemos o trajecto de P até cada um dos lados de \mathcal{T} , começando por visitar o lado a , de seguida b e depois c , seguindo sempre pelo caminho mais curto. A partir deste último ponto em c podemos iterar o processo, respeitando a ordem alfabética das etiquetas dos lados. Ao fim de várias experiências, mudando o ponto inicial, suspeitamos que existe uma figura limite, \mathcal{T}_{abc} , que é outro triângulo e que não varia com o ponto de partida P . Uma inspecção mais cuidada levamos-nos mesmo a conjecturar que este triângulo limite é semelhante ao original. Além disso, se alterarmos a ordem com que a trajectória toca os lados do triângulo inicial, de a, b, c para b, a, c , continua a existir um triângulo limite que parece congruente com \mathcal{T}_{abc} e ter o mesmo circuncentro.

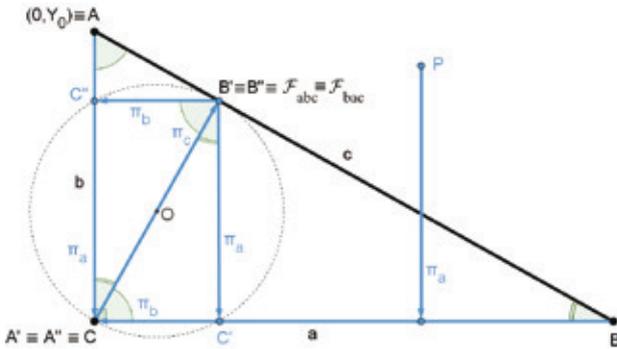


Para provarmos as propriedades que as figuras sugerem, podemos fixar um lado do triângulo original e, para cada ponto P , tomar apenas nota do traço que o percurso de P deixa nesse lado. Desse modo, o processo acima descrito para a ordem a, b, c corresponde à iteração da aplicação $\phi_{abc} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\phi_{abc} = \pi_c \circ \pi_b \circ \pi_a$, onde π_a, π_b e π_c são as projecções ortogonais nos lados a, b e c . E a existência de um ponto fixo atrator de ϕ_{abc} é equivalente à presença do triângulo limite \mathcal{T}_{abc} .

Comecemos por analisar um caso particular, quando \mathcal{T} é um triângulo rectângulo de vértices A, B e C com $\hat{C} = \angle(ACB) = \frac{\pi}{2}$. Podemos supor que o lado a está no eixo dos x 's, b no eixo dos y 's e c contido na linha que passa em $(0, Y_0)$ com direcção dada pelo vector $(-\cos(\hat{B}), \sin(\hat{B}))$, onde

$Y_0 = |b| = |a| \operatorname{tg}(\hat{B})$ e \hat{B} é o ângulo de \mathcal{T} no vértice B . Assim, fixado $P = (P_1, P_2)$, temos

$$\begin{aligned} \phi_{abc}(P) &= \pi_c \circ \pi_b \circ \pi_a(P) = \pi_c \circ \pi_b(P_1, 0) = \pi_c(0, 0) \\ &= Y_0 \cos(\hat{B}) (\operatorname{sen}(\hat{B}), \cos(\hat{B})) \\ &= |a| \operatorname{sen}(\hat{B}) (\operatorname{sen}(\hat{B}), \cos(\hat{B})). \end{aligned}$$



Este ponto, que designamos por \mathfrak{F}_{abc} pertence ao lado c e é independente de P . Os pontos $A' = C = (0, 0)$, $B' = \mathfrak{F}_{abc}$ e $C' = \pi_a(\mathfrak{F}_{abc}) = (|a| \operatorname{sen}^2(\hat{B}), 0)$ são os vértices de um novo triângulo \mathcal{T}_1 que podemos comparar com \mathcal{T} . Como as projecções são ortogonais, $\angle(A'C'B') = \frac{\pi}{2} = \hat{C}$. Além disso, $\angle(B'A'C') = \angle(B'A'B) = \hat{A}$, e portanto os triângulos \mathcal{T} e \mathcal{T}_1 são semelhantes, com razão de semelhança igual a $\frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{|a| \operatorname{sen}^2(\hat{B})}{|a| \operatorname{tg}(\hat{B})} = \operatorname{sen}(\hat{B}) \cos(\hat{B})$. O quociente entre as áreas de \mathcal{T} e \mathcal{T}_1 é igual a $\frac{|A'C'|^2}{|AC|^2} = (\operatorname{sen}(\hat{B}) \cos(\hat{B}))^2$, valor que depende apenas dos ângulos de \mathcal{T} e atinge o máximo, igual a $\frac{1}{4}$ quando $\hat{B} = \frac{\pi}{4}$, ou seja, quando \mathcal{T} é isósceles.

Se mudarmos a ordem com que os lados do triângulo inicial são visitados pelo ponto P , de abc para bac , um argumento idêntico prova que ϕ_{bac} também tem um ponto fixo atrator global, digamos \mathfrak{F}_{bac} , no lado c de \mathcal{T} . De facto, \mathfrak{F}_{bac} coincide com \mathfrak{F}_{abc} ; porém, as suas imagens por π_b e $\pi_a \circ \pi_b$ constroem um triângulo limite distinto, digamos \mathcal{T}_2 , cujos vértices são $A'' = C = (0, 0)$, $B'' = B' = \mathfrak{F}_{abc}$ e $C'' = \pi_b(\mathfrak{F}_{abc}) = (0, |a| \operatorname{sen}(\hat{B}) \cos(\hat{B}))$. O triângulo \mathcal{T}_2 é semelhante a \mathcal{T} , logo semelhante a \mathcal{T}_1 . Além disso, como \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 têm um lado em comum – $A'B'$ do primeiro, $A''B''$ do segundo –, concluímos que \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 são congruentes. A rotação de 180 graus em torno do ponto $O = \frac{\mathfrak{F}_{abc}}{2}$ envia um triângulo no outro.

Observe-se ainda que, como O é o ponto médio das hipo-

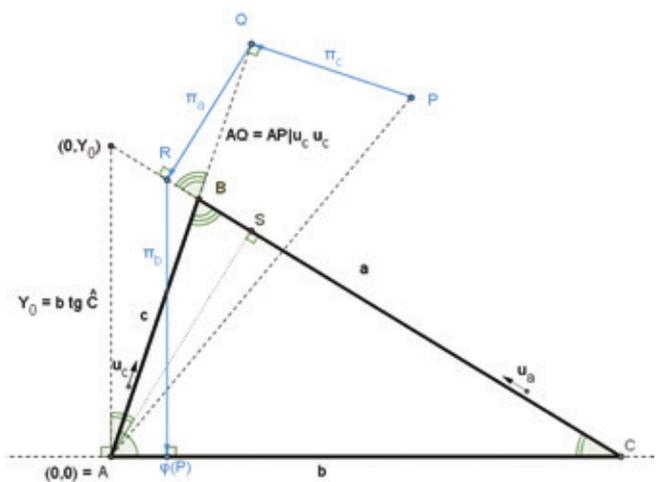
tenusas de \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 , é o circuncentro comum a estes dois triângulos.

Seja agora \mathcal{T} um triângulo qualquer de lados a, b, c e ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ nos vértices A, B e C , respectivamente. Podemos supor, como anteriormente, que $A = (0, 0)$, o lado $c = AB$ passa por $(0, 0)$ com inclinação determinada por \hat{A} , o lado $b = AC$ está no eixo dos x 's e $a = BC$ está contido na linha que passa em C e cruza o eixo dos y 's no ponto $(0, Y_0)$, onde $Y_0 = |b| \operatorname{tg}(\hat{C})$. Se $u_a = \frac{\vec{CB}}{\|\vec{CB}\|} = (-\cos(\hat{C}), \operatorname{sen}(\hat{C}))$ e $u_c = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = (\cos(\hat{A}), \operatorname{sen}(\hat{A}))$, então, identificando qualquer ponto X com o seu vector de posição AX , temos, para cada ponto $P = (P_1, P_2)$ do plano,

$$\pi_c(P) = AQ = AP|u_c u_c$$

$$\begin{aligned} \pi_a(Q) &= AR = AS + SR = AS + AQ|u_a u_a = \\ &= AS + (AP|u_c u_c)|u_a u_a = \\ &= Y_0 \cos(\hat{C}) (\operatorname{sen}(\hat{C}), \cos(\hat{C})) + (AP|u_c u_c) (\cos(\hat{A}), \operatorname{sen}(\hat{A})) \\ &= (Y_0 \operatorname{sen}(\hat{C}) \cos(\hat{C}), Y_0 \cos^2(\hat{C})) + \\ &\quad + (P_1 \cos(\hat{A}) + P_2 \operatorname{sen}(\hat{A})) \cos(\hat{B}) (-\cos(\hat{C}), \operatorname{sen}(\hat{C})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_b(R) &= (Y_0 \operatorname{sen}(\hat{C}) \cos(\hat{C}) - (P_1 \cos(\hat{A}) + \\ &\quad + P_2 \operatorname{sen}(\hat{A})) \cos(\hat{B}) \cos(\hat{C}), 0) \\ &= \pi_b \circ \pi_a \circ \pi_c(P) = \phi_{cab}(P). \end{aligned}$$



Se restringirmos o domínio de $\phi = \phi_{cab}$ à linha que contém o lado b , que é o eixo dos x 's, ficamos com uma dinâmica mais simples, pois trata-se de iterar a aplicação real de variável real

$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow Y_0 \operatorname{sen}(\hat{C})\cos(\hat{C}) - \cos(\hat{A})\cos(\hat{B})\cos(\hat{C}) x.$$

A equação $f(x) = x$ tem uma única solução,

$$x_1 = \frac{Y_0 \operatorname{sen}(\hat{C})\cos(\hat{C})}{1 + \cos(\hat{A})\cos(\hat{B})\cos(\hat{C})}$$

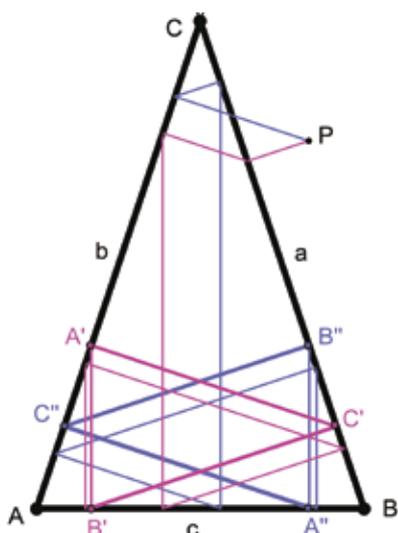
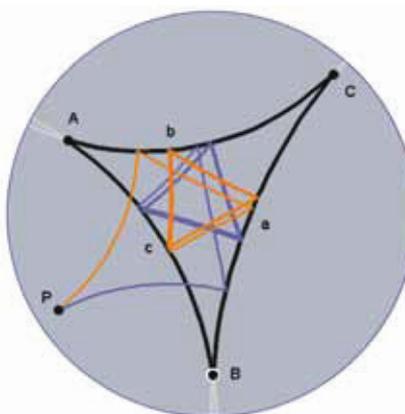
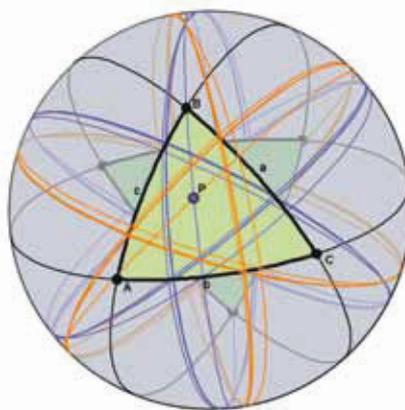
que é a abscissa do único ponto fixo, digamos \mathcal{G}_{cab} de φ no lado b do triângulo \mathcal{T} . E este ponto é um atractor global. De facto, dado $x \in \mathbb{R}$, existe ξ tal que

$$\begin{aligned} f(x) - x_1 &= f(x) - f(x_1) = f'(\xi)[x - x_1] = \\ &= -\cos(\hat{A})\cos(\hat{B})\cos(\hat{C})[x - x_1] \end{aligned}$$

valor que é zero, como já sabíamos, no caso em que \mathcal{T} é um triângulo rectângulo. Se \mathcal{T} não é rectângulo, note-se que a função $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto -\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)$ restrita ao conjunto $\{(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}^+)^3: \alpha + \beta + \gamma = \pi\}$ atinge um mínimo, igual a $-\frac{1}{8}$, quando $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, e um máximo, igual a 1, se $\pi \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Contudo, como nenhum ângulo do triângulo \mathcal{T} vale π , podemos garantir que $-\frac{1}{8} \leq \cos(\hat{A})\cos(\hat{B})\cos(\hat{C}) < 1$. E portanto a órbita $(\varphi^n(P))_{n \in \mathbb{N}}$ de qualquer ponto P converge para \mathcal{G}_{cab} .

O triângulo limite \mathcal{T}_1 , com vértices $A' = \mathcal{G}_{cab}$, $B' = \pi_c(\mathcal{G}_{cab})$ e $C' = \pi_a \circ \pi_c(\mathcal{G}_{cab})$, é semelhante ao inicial (mas rodado de 90 graus); e o quociente entre as áreas de \mathcal{T} e \mathcal{T}_1 depende apenas dos ângulos de \mathcal{T} . Cálculos análogos mostram que ϕ_{acb} também tem um ponto fixo atractor global, digamos \mathcal{G}_{acb} no lado b de \mathcal{T} , cujos iterados por π_a e $\pi_c \circ \pi_a$ constroem um novo triângulo \mathcal{T}_2 que é congruente com \mathcal{T}_1 (mas rodado de 180 graus) e tem o mesmo circuncentro.¹

Podemos generalizar o estudo anterior de vários modos, mas nem todas as propriedades descritas anteriormente sobrevivem neste cenário mais geral. Por exemplo, podemos considerar outros arranjos periódicos das etiquetas dos lados do triângulo; ou usar projecções não ortogonais; ou ainda utilizar projecções cujos ângulos variem com o lado do triângulo; ou, em vez de um triângulo, começar com outro polígono. Além disso, o mesmo problema pode ser endereçado em superfícies não planas, e aqui esperam-se novidades pois, por exemplo, numa esfera não há triângulos semelhantes distintos. O programa *Cinderella* permite transcrever facilmente as figuras planas para uma esfera ou para o (modelo de Poincaré do) plano hiperbólico, ajudando a conjecturar sobre o comportamento assintótico desta dinâmica quando actua num mundo com curvatura não nula.



¹Alguns dos detalhes omitidos neste texto podem ser lidos na página <http://www.atractor.pt/mat/projecoes/> do site do *Atractor*.