No âmbito de uma colaboração acordada entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interactivos do seu *site* (*www.atractor.pt*). Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para atractor@atractor.pt.

A Matemática do Futebol

"Vós, que sois abençoados com sombra e também com luz, vós, que sois dotados de dois olhos capazes de perceberem a perspectiva e de se encantarem com a diversidade das cores, vós, que podeis de facto ver um ângulo e abarcar toda a circunferência de um Círculo na afortunada região das Três Dimensões – como poderei eu fazer-vos entender claramente a extrema dificuldade que nós no Mundo Plano temos em reconhecer as formas uns dos outros?"

Edwin A. Abbott, *Flatland – A romance of many dimensions*

Figura 1

Uma circunferência é o conjunto de pontos no plano equidistantes de um ponto fixado. Esta curva caracteriza-se por outras propriedades de natureza distinta que poderiam servir igualmente como definição: entre todas as curvas planas, simples (sem auto-intersecções) e fechadas (se as percorrermos sempre no mesmo sentido a partir de um ponto, retornamos a esse ponto), é a única que: (1) tem curvatura constante positiva; (2) é intersectada por qualquer corda em ângulos iguais; (3) engloba a maior área entre as de igual perímetro.

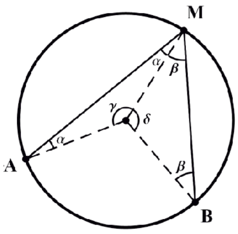

Figura 2
$\gamma+\delta = 2\pi-2(\alpha+\beta)$

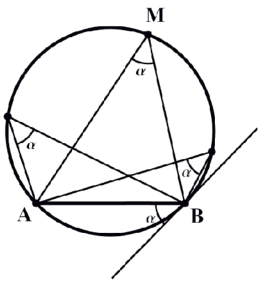

Figura 3

O *Atractor* desenvolveu um módulo interactivo (usado, em 2005, para participantes de 10/11 anos, no âmbito da Universidade Júnior, uma iniciativa da Universidade do Porto) cujo guião[1] se serve do futebol para ilustrar outra propriedade que só a circunferência verifica, conhecida como *Teorema do arco capaz*: (a) qualquer ângulo[2] inscrito numa circunferência, de centro O e raio R, tem amplitude igual a 1/(2R) do arco por ele subtendido (fig. 2); daqui resulta, em particular, que ângulos inscritos numa circunferência e suportados pela mesma corda são iguais (fig. 3); (b) fixado um ângulo $\sphericalangle AMB$ de amplitude α, o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que o ângulo $\sphericalangle APB$ tem amplitude α é precisamente o arco de circunferência com extremos A e B e que passa em M. Além disso, considerando a curva formada pelo referido arco em conjunto com o segmento $[AB]$, então, se um ponto P está no interior da curva, a amplitude de $\sphericalangle APB$ é maior do que α e, se P é exterior à curva, a amplitude de $\sphericalangle APB$ é menor do que α (fig. 4). As duas imagens seguintes mostram como esta afirmação resulta do facto de, em qualquer triângulo, cada ângulo externo ser a soma dos ângulos internos não adjacentes.

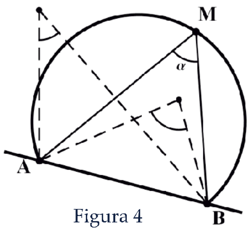

Figura 4

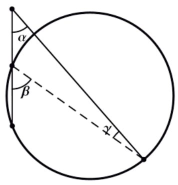

Figura 5
$\beta=\alpha+\gamma \Rightarrow \alpha<\beta$

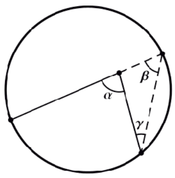

Figura 6
$\alpha=\beta+\gamma \Rightarrow \alpha>\beta$

[1] *http://www.atractor.pt/ujr/acti2005.htm*

[2] Neste trabalho, ângulo e corda serão usados no sentido de ângulo orientado e corda orientada.

No futebol, faz parte da estratégia a determinação do local ideal para a marcação de golo. E, mesmo ignorando os jogadores da equipa adversária, não é certo que um jogador marque golo de qualquer ponto do campo. Claro que um jogador colocado um metro à frente do meio da baliza, e sem adversários, consegue marcar golo. De que outros pontos conseguirá ter igual certeza? A resposta depende da pontaria do jogador. E, no módulo, a pontaria de cada jogador é representada por uma cunha com ângulo igual ao dobro do seu ângulo máximo de erro: quanto melhor for o jogador, mais estreita é a cunha.

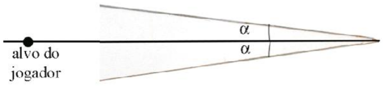

Figura 7
Cunha

Consideremos agora uma situação concreta: um jogador está a correr ao longo de uma linha – r – paralela à linha lateral (fig. 10). Há algum sítio, nessa linha, onde ele tenha a certeza de marcar golo? De novo a resposta depende do jogador, ou seja, da cunha que lhe está associada. E podem ocorrer três situações distintas. Se considerarmos o arco capaz que passa pelos extremos da baliza, A e B, e que tem um ângulo inscrito 2α suportado na corda AB, então: (1) ou o arco não intersecta r, e por isso não há nenhum sítio onde seja certa a marcação de golo; (2) ou o arco e a recta r se intersectam em dois pontos, C e D, e o golo está garantido se marcado a partir do segmento de recta $[CD]$ (fig. 11); (3) ou r é tangente ao arco, e o ponto de tangência é o único em que está assegurada a marcação de golo.

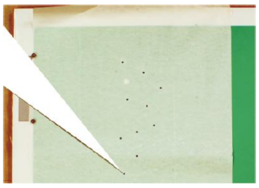

Figura 8

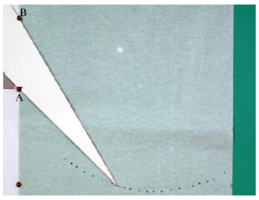

Figura 9

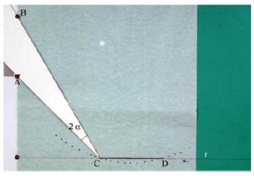

Figura 11

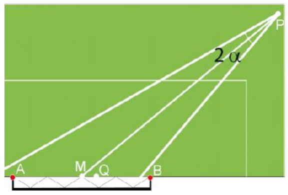

Figura 12

Para determinar a região onde um jogador (sem adversários) está certo de marcar golo, o utilizador do módulo[3] coloca a cunha (como indicado na figura 8) e vai marcando pontos numa folha de papel transparente previamente fixada sobre o campo. Na verdade, para delimitar a região desejada, basta ir assinalando os pontos correspondentes às posições da cunha em que ela encosta aos dois postes da baliza: esta região, cujo bordo é a curva assim obtida experimentalmente, representa os locais onde um jogador, que aponte correctamente, está certo de fazer um golo[4]. Essa curva (fig. 9) tem uma forma que lembra a de um arco de circunferência – e já justificámos acima que é essa a solução do problema.

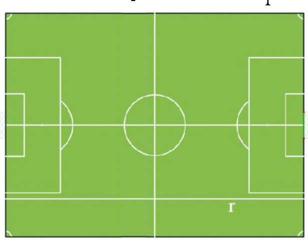

Figura 10

Encontrando-se o jogador num bom sítio para rematar, para onde deve ele apontar a bola se pretende marcar golo? Deverá apontar para o meio da baliza? Os utilizadores do módulo são novamente convidados a testar experimentalmente várias cunhas (jogadores) para verificarem que, em certas circunstâncias (como a descrita na figura), é possível a um jogador na posição P, ao apontar a bola para o ponto médio M de $[AB]$, falhar a marcação do golo (fig. 12). Com um pouco mais de esforço, convencem-se de que, se o jogador tivesse apontado para o ponto Q de intersecção da bissectriz de $\sphericalangle APB$ com $[AB]$, então, sem a intervenção dos defesas ou do guarda-redes, o golo estaria garantido. E daqui deduzem facilmente que um jogador deve apontar a bola para o meio da baliza apenas quando Q coincide com M, isto é, quando o triângulo $[APB]$ é isósceles, com $|PA|=|PB|$. M

[3] Está disponível uma versão virtual do módulo em *http://www.atractor.pt/ujr/materiais-2005/Futebol.gsp*
[4] Para simplificar a abordagem, ainda se considera golo se a bola bater na trave