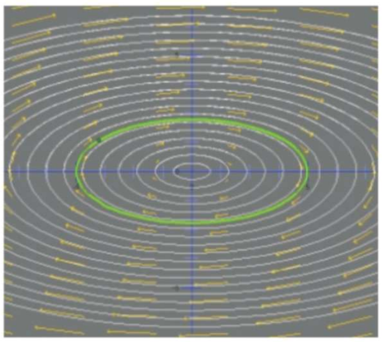
No âmbito de uma colaboração acordada entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interactivos do seu site (www.atractor.pt). Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para atractor@atractor.pt.

Movimentos Pendulares

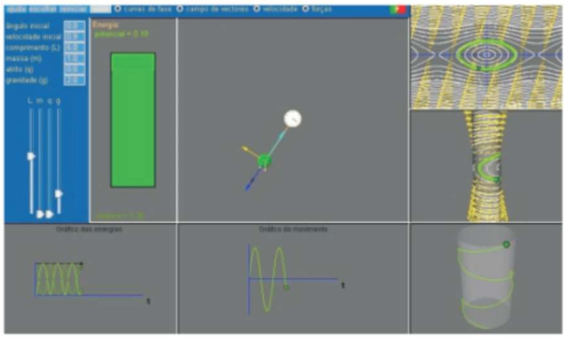
"Ouvi dizer a um homem instruído [Eratóstenes] que o tempo não é mais que o movimento do sol. Por que não seria antes o movimento de todos os corpos? Se os astros parassem e continuasse a mover-se a roda do oleiro, deixaria de haver tempo para medirmos as suas voltas?" - Santo Agostinho, em *Confissões*.

O Atractor desenvolveu um conjunto de aplicações interactivas sobre diversos tipos de sistemas dinâmicos oscilatórios. As versões mais elementares são o oscilador harmónico e o pêndulo simples. No primeiro, uma bola de massa m está sujeita apenas à acção de uma mola;

se a localização da bola for descrita relativamente à posição de repouso da mola, a força f exercida, para cada posição x, sobre a bola é a de distensão ou compressão da mola e tem o sinal oposto ao de x. Supondo-a proporcional ao deslocamento, teremos $f(x) = -k\,x$ ($k>0$). A equação do movimento será, pois, $-k\,x = m\,x''$ ou $x'' = -k/m\,x$, equação diferencial de 2.ª ordem equivalente ao sistema de equações de 1.ª ordem $x' = y$, $y' = -k/m\,x$.

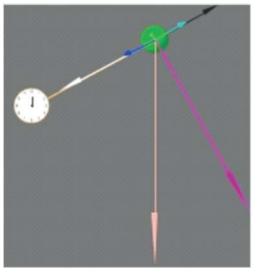


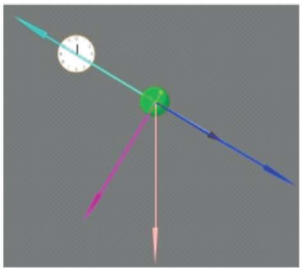
A cada solução da equação corresponderá, no plano xy, uma curva (dita de fase) tangente em cada ponto (x,y) ao vector $(y, -k/m\,x)$. O *applet*[1] permite variar os parâmetros m e k e seguir, em simultâneo, o movimento da bola e do ponto (x,y) no plano de fase, as variações das energias cinética e potencial e o gráfico do movimento. No segundo exemplo, do pêndulo simples[2], a bola de massa m move-se num plano por acção da gravidade g, mantendo-se ligada a um ponto por uma haste rígida (de comprimento L, eventualmente com atrito q e suposta sem massa).



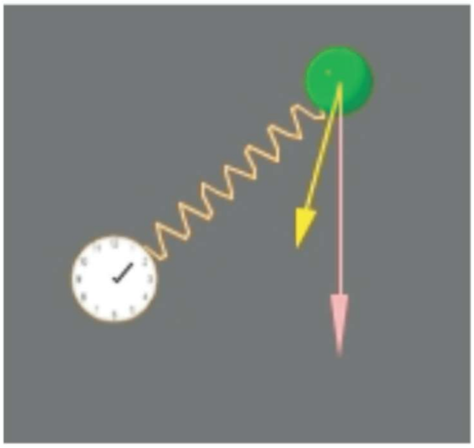
A posição da bola é descrita pelo ângulo x da haste com a posição de equilíbrio (na vertical) e há que estudar as forças que actuam sobre a bola. O *applet* permite analisar *em tempo real* o movimento e velocidade da bola, as variações da energia, o espaço de fase e gráficos do movimento e ainda as forças que nela actuam.

[1] http://www.atractor.pt/mat/pendulos/oscilador
[2] http://www.atractor.pt/mat/pendulos/penduloRigido



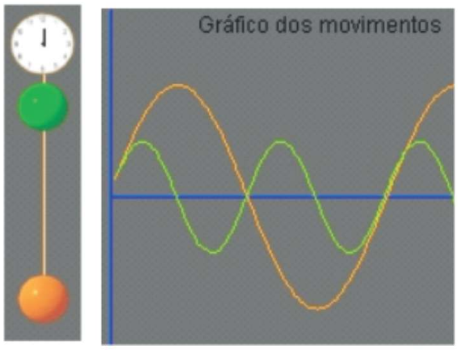


Nas figuras em cima, o vector peso, na vertical, decompõe-se numa componente tangencial ($-p\ Sen\ x$) e noutra radial e, em movimento, surge ainda uma componente radial de força centrífuga; a resultante das componentes radiais (azul escuro) é equilibrada pela reacção da haste (azul claro), pelo que a resultante radial final é sempre nula. A única componente relevante para o movimento do pêndulo é a tangencial ($-p\ Sen\ x$) e a equação será $-p\ Sen\ x = m\,x''$ ou $-mg\ Sen\ x = m\,x''$, ou ainda $x'' = -g\ Sen\ x$, equivalente a $x' = y,\ \ y' = -g\ Sen\ x$. Além daqueles dois exemplos, foram programados outros *applets*:

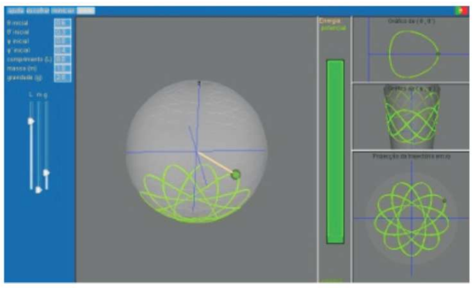


1. Pêndulo simples de fio[3], cuja dinâmica é distinta da anterior porque a componente radial só será anulada pela reacção do fio se essa componente radial apontar *para fora*, com o fio a compensar com uma força *para dentro* de grandeza igual. Se a componente radial apontar *para dentro*, o fio não a compensa e o movimento deixa de ser pendular: a posição da bola é agora descrita por dois parâmetros e a bola entra em queda livre com movimento parabólico, até o fio esticar de novo.

O *applet* trata este caso, admitindo choque inelástico no "esticão", com a consequente perda de energia; e permite a observação de comportamentos muito interessantes: a alternância entre os dois tipos de movimento, pendular e de queda livre, com gradual perda de energia.

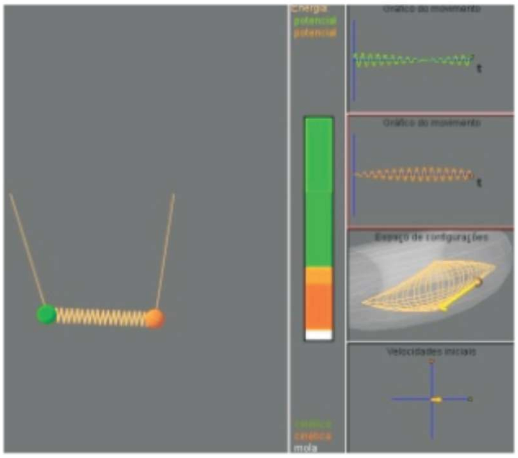


2. Dois pêndulos rígidos[4] movendo-se simultaneamente, permitindo assim fazer verificações *experimentais* - se não houver atrito, o período não depende da massa, para pequenas oscilações, *quase* não depende da amplitude inicial e se, além disso, o comprimento de um aumentar por um factor k^2 (4, na figura), o período aumenta por um factor k.

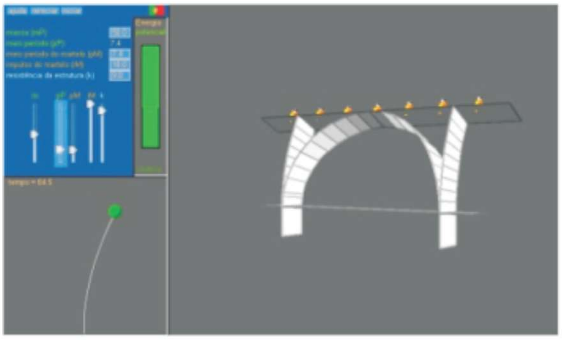


3. Pêndulo esférico[5].

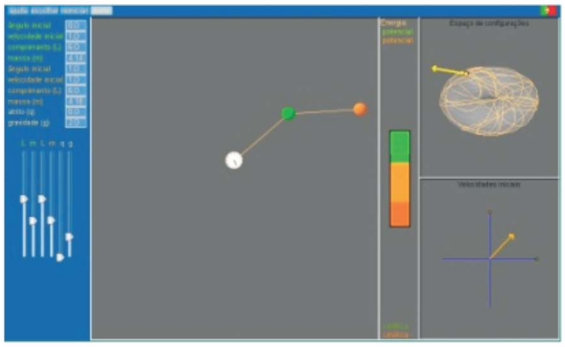
[3] http://www.atractor.pt/mat/pendulos/penduloFio
[4] http://www.atractor.pt/mat/pendulos/2pendulos
[5] http://www.atractor.pt/mat/pendulos/penduloEsferico



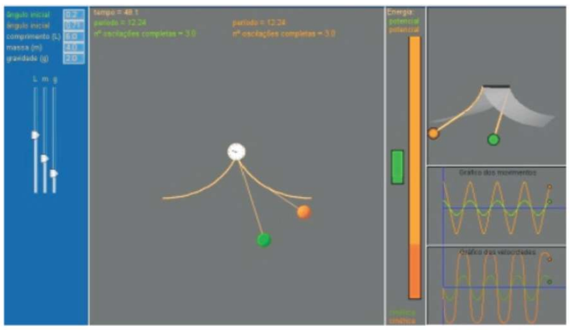
4. Pêndulo duplo[6] com os conhecidos comportamentos de tipo caótico e em que se pode também ver em tempo real a trajectória do movimento no toro, que é o espaço de configurações associado.



5. Pêndulo cicloidal[7] (ou **tautócrono**), cuja frequência não depende da amplitude das oscilações, o que pode ser verificado *experimentalmente* com **6. Dois pêndulos cicloidais**[8]. A independência da frequência consegue-se com uma curva "de encosto" para o fio do pêndulo: o comprimento útil do pêndulo vai diminuindo à medida que a amplitude cresce. Com uma forma adequada para essa curva, consegue-se que os efeitos (contrários) dessas variações (maior amplitude inicial → maior período e menor comprimento → menor período) se compensem; prova-se que a solução é uma ciclóide.



7. Pêndulos acoplados[9], em que há agora cinco tipos diferentes de energia, e uma (quase) total transferência alternada da energia de um para o outro pêndulo, bem visível pela própria simulação, pelo gráfico (de barras) da energia, pelos dois gráficos do movimento e pela alternância com que as órbitas aparecem em direcções quase perpendiculares, no espaço de configurações (toro). **8. Pêndulo excitado**[10] com os fenómenos de ressonância associados; e



9. Ressonância de ponte, em que é evocado um episódio de ressonância[11] da ponte D.Luís (Porto-Gaia), ocorrido em Abril de 1931, aquando do funeral de um estudante de Medicina, que morrera ao ser perseguido pela polícia. M

[6] http://www.atractor.pt/mat/pendulos/penduloDuplo
[7] http://www.atractor.pt/mat/pendulos/penduloCicloidal
[8] http://www.atractor.pt/mat/pendulos/2pendulosCicloidais
[9] http://www.atractor.pt/mat/pendulos/pendulosAcoplados
[10] http://www.atractor.pt/mat/pendulos/penduloExcitado
[11] http://www.atractor.pt/mat/pendulos/osciladorPonte