A Geometria do Planeta Terra

No âmbito da iniciativa *Matemática do Planeta Terra 2013,* a Associação Atractor e o Núcleo do Porto da Associação de Professores de Matemática propõem a realização de um conjunto de tarefas sobre Geometria Esférica. O estudo desta geometria pode permitir a resolução de problemas ligados ao planeta Terra: por exemplo, na época dos Descobrimentos, era muito importante saber qual o caminho mais curto entre dois locais do planeta e qual a rota que se deveria seguir. Mesmo atualmente, em que o sistema GPS é uma ferramenta poderosa, os pilotos de avião e os navegadores deverão ter conhecimentos sobre Geometria Esférica. Esta geometria difere em vários aspetos da Geometria Euclidiana e, nestas tarefas, pretende-se iniciar o seu estudo bem como explorar algumas dessas diferenças. O trabalho proposto, de caráter exploratório, recorre a materiais manipuláveis e a ambientes de geometria dinâmica que proporcionam uma melhor visualização e compreensão de determinadas propriedades, facilitando a formulação de conjeturas e desenvolvendo a capacidade de resolução de problemas.

Ano lectivo 2012/2013

Conteúdo

Na página http://atractor.pt/mat/GeomEsf encontra-se um trabalho sobre Geometria Esférica, elaborado sob a orientação do Atractor, no âmbito de uma bolsa atribuída pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia para ações de divulgação matemática junto da Associação Atractor. Esse trabalho integra componentes interativas em formato CDF, preparadas com o programa *Mathematica* e cujos ficheiros (disponíveis em http://atractor.pt/mat/GeomEsf/MateriaisEnsino) são utilizados neste projeto numa colaboração entre a Associação Atractor e o Núcleo do Porto da APM. Para a utilização destes ficheiros, deve estar instalado no computador o *Wolfram CDFPlayer*, que pode ser importado sem encargos a partir de http://www.wolfram.com/cdf-player/.

NOTA HISTÓRICA

"E quem desta maneira andar irá caminhar direito." Pedro Nunes (1502-1578)

A esfera pode ser considerada um modelo (simplificado[1]) do planeta Terra e existe uma geometria que se dedica ao seu estudo: a Geometria Esférica. O estudo da Geometria Esférica, principalmente o relacionado com triângulos esféricos, é muito antigo e foi sendo desenvolvido ao longo dos séculos devido à sua grande aplicabilidade à Astronomia e à Navegação. O português Pedro Nunes foi um dos matemáticos que se notabilizou nesta área tendo descoberto uma curva que, na época dos Descobrimentos, gerou alguma controvérsia: a curva loxodrómica. Mesmo atualmente, em que o sistema GPS é uma ferramenta poderosa, os pilotos de avião e os navegadores têm que ter conhecimentos sobre Geometria Esférica (Alexander, 2004 [1]).

Apesar de muitos resultados da Geometria Esférica serem conhecidos desde a Antiguidade, enquanto sistema axiomático, este tipo de geometria só foi formalizado no séc. XIX após a descoberta das geometrias não Euclidianas. Estas geometrias surgiram no desenlace da longuíssima história do famoso 5º Postulado de Euclides, mais conhecido pelo Postulado das Paralelas. Ao longo dos séculos, foram várias as tentativas de provar este postulado a partir dos restantes, ou então de o substituir por outro mais simples. Um dos axiomas equivalentes que é usado nos livros modernos foi dado por Playfair: *dado um ponto P que não está numa reta r, existe uma só reta no plano de P e r que contém P e que não interseta r*. (Kline, 1972 [3])

No início do século XIX, alguns matemáticos, incluindo o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), notaram que o Postulado das Paralelas não poderia ser provado nem como verdadeiro nem como falso com base nos outros postulados da Geometria Euclidiana, ou seja, o Postulado das Paralelas seria independente dos restantes. Seria então possível desenvolver uma nova geometria a partir de um sistema axiomático que contivesse uma alternativa ao Postulado das Paralelas. Mas foram Lobatschewski (1792-1856) e János Bolyai (1802-1860) que, de forma independente, publicaram pela primeira vez os resultados de uma nova geometria não Euclidiana (Rosenfeld, 1976 [4]), conhecida atualmente por Geometria Hiperbólica. A Geometria Hiperbólica obtém-se substituindo o Postulado das Paralelas pelo Axioma Hiperbólico: *dada uma reta e um ponto exterior à reta, existem, pelo menos, duas retas distintas contendo o ponto dado e paralelas à reta dada.* Na Geometria Esférica, o Postulado das Paralelas é substituído pelo Axioma Elíptico: *dada uma reta e um ponto exterior à reta, não existe nenhuma reta contendo o ponto dado e paralela à reta dada.*

Bernhard Riemann (1826-1866) foi o primeiro a reconhecer a Geometria Esférica como um tipo de geometria não Euclidiana onde não existem retas paralelas. (Coxeter, 1998 [2])

A descoberta das geometrias não Euclidianas teve consequências muito importantes, quer matemáticas quer filosóficas, principalmente no que diz respeito aos fundamentos da matemática.

[1] Na verdade, o planeta Terra pode ser modelado por um elipsoide: o raio da Terra varia entre, aproximadamente, 6357 Km nos polos e 6378 Km na linha do Equador.

Referências

[1] ALEXANDER, James - *Loxodromes: A Rhumb Way to Go.* Mathematics Magazine, Vol. 77, n.º 5, December 2004, pp. 349 - 356.

[2] COXETER, H. S. M. - *Non-Euclidean Geometry*. Cambridge University Press, 1998.

[3] KLINE, Morris - *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times, Volume 3.* Oxford University Press, 1972.

[4] ROSENFELD, B. A. - *A History of Non-Euclidean Geometry.* New York: Springer-Verlag New York Inc., 1988. Translation of *Istoriya Neevklidovoi Geometrii.* Moscow: Nauka, 1976.

SECUNDÁRIO

Tarefa

Planificação

PROPÓSITO PRINCIPAL DE ENSINO

Estudar a Geometria Esférica, explorando algumas diferenças entre esta e a Geometria Euclidiana.

<table>
<tr><th>Tópicos / Subtópicos</th><th>Objetivos</th><th>Vocabulário</th></tr>
<tr><td colspan="2">Geometria</td><td rowspan="5">Plano
Reta
Segmento de reta
Curva
Esfera
Superfície Esférica
Círculo máximo
Triângulo
Biângulo
Área</td></tr>
<tr><td>Esfera
Superfície Esférica</td><td>▪ Determinar a área de um triângulo esférico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Capacidades transversais</td></tr>
<tr><td>Raciocínio
▪ Justificação
▪ Argumentação

Comunicação
▪ Expressão
▪ Discussão</td><td>▪ Explicar e justificar processos, resultados e ideias matemáticos, recorrendo a exemplos e contraexemplos.
▪ Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
▪ Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.</td></tr>
</table>

PRÉ-REQUISITOS

Identificação dos lugares geométricos esfera, superfície esférica e circunferência; cálculo da área da esfera; noção de triângulo esférico.

RECURSOS

Computadores com o *software Wolfram CDF Player* instalado (pode ser importado sem encargos a partir de http://www.wolfram.com/cdf-player/);
ficheiro *área_de_um_triângulo.cdf* que pode ser descarregado de www.atractor.pt/mat/GeomEsf/MateriaisEnsino.

DURAÇÃO PREVISTA

1 bloco de 90 minutos.

DESENVOLVIMENTO DA TAREFA

Qual é a área de um triângulo esférico?

1. O ficheiro *área_de_um_triângulo.cdf* contém uma aplicação interativa com uma esfera de raio unitário com três pontos móveis assinalados, A, B e C, formando um triângulo.

2. Ao clicar na caixa *Biângulos A*, o aluno deverá concluir que os dois círculos máximos dividem a superfície esférica em quatro regiões, cada uma delas com dois lados. O professor deverá referir que, ao contrário do que acontece na Geometria Euclidiana, na Geometria Esférica existem polígonos com dois lados, os biângulos ou lúnulas. Os dois vértices destes polígonos são pontos antípodas e os lados são semicírculos máximos.

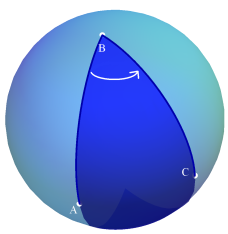


Figura 1: Na figura está assinalado o ângulo orientado ABC do biângulo colorido a azul escuro: considerando os lados do ângulo ABC, chamaremos ângulo à região que está sempre à direita do caminho orientado que vai de A para B e de B para C.

3. De acordo com os conhecimentos dos alunos, o professor deverá solicitar o preenchimento da coluna *Ângulo* ou em graus e/ou em radianos:

Biângulo	Ângulo	Área
semiesfera	π rad ou $180°$	$2\pi r^2$
$\frac{1}{4}$ de esfera	$\frac{\pi}{2}$ rad ou $90°$	πr^2
$\frac{1}{5}$ de esfera	$\frac{2\pi}{5}$ rad ou $72°$	$\frac{4\pi}{5} r^2$
$\frac{1}{n}$ de esfera	$\frac{2\pi}{n}$ rad ou $\frac{360°}{n}$	$\frac{4\pi}{n} r^2$
biângulo	α	$2\alpha r^2$ (α rad) ou $\frac{\alpha\pi}{90} r^2$ ($\alpha°$)

4. Considerando um triângulo esférico *pequeno*, ou seja, contido numa semiesfera, e, ao clicar nas caixas *Biângulos A* e *Biângulos B,* o aluno deverá observar que a interseção de dois biângulos (um cor de rosa e outro azul) é o interior do triângulo e que a interseção dos outros dois corresponde ao interior do triângulo antípoda (triângulo formado pelos antípodas dos pontos do triângulo).

5. Clicando na caixa *Biângulos C*, o aluno deverá concluir que, dos seis biângulos coloridos, três intersetam-se no interior do triângulo e os outros três intersetam-se no triângulo antípoda. Na região esférica restante, os seis biângulos são disjuntos dois a dois. Assim, estes biângulos "cobrem" o triângulo e o seu antípoda três vezes e a restante região esférica uma vez.

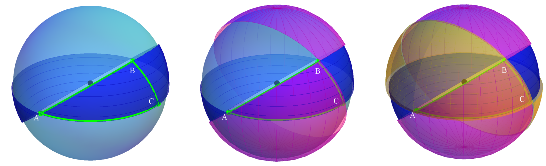


Figura 2: Biângulos que "cobrem" o triângulo $[ABC]$ (cor de laranja) e o seu antípoda três vezes e a região esférica restante uma vez.

6. O aluno deverá notar que a soma da área dos seis biângulos é igual à área da esfera acrescida do dobro da área do triângulo esférico e do dobro da área do seu antípoda. O professor poderá solicitar aos alunos uma fórmula para a área de um triângulo *pequeno*, A_T, que dependa das amplitudes dos seus ângulos internos (considere uma esfera de raio 1). Sendo T um triângulo *pequeno* com amplitudes dos seus ângulos internos α, β e γ (são também as amplitudes dos biângulos correspondentes) e usando a fórmula da área do biângulo encontrada no ponto 3 e a relação acabada de definir, vem que:

$$\begin{aligned} 2A_{biA} + 2A_{biB} + 2A_{biC} &= A_{esf} + 2A_T + 2A_T \\ 2 \times (2\alpha + 2\beta + 2\gamma) &= 4\pi + 4A_T \\ 4(\alpha + \beta + \gamma) &= 4\pi + 4A_T \\ A_T &= \alpha + \beta + \gamma - \pi \end{aligned}$$

(com α, β e γ em radianos);

Se as amplitudes α, β e γ forem dadas em graus, temos a fórmula $A_T = (\alpha + \beta + \gamma - 180)\frac{\pi}{180}$ (com α, β e γ em graus).

Neste ponto, o professor poderá ainda colocar a seguinte questão: como calcular a área de um triângulo esférico *grande*, ou seja, que não está contido numa semiesfera? Considerando um triângulo esférico T que não está contido numa semiesfera, os seus lados e vértices definem outro triângulo com área menor que denominamos de triângulo complementar, T_C, do triângulo T. A área do triângulo esférico T pode ser calculada através da diferença entre a área da esfera e a área de T_C. Como T_C está contido numa semiesfera, podemos usar a fórmula já determinada para calcular a área de T_C e verificar que a fórmula obtida para triângulos *pequenos* também é válida para *triângulos grandes*.

Este resultado é conhecido como o **Teorema de Girard**. A fórmula dada neste teorema indica-nos que a área de um triângulo esférico é diretamente proporcional ao seu excesso angular. Em particular, o excesso angular é sempre positivo, donde podemos concluir que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico é superior a $180°$!

O Teorema de Girard conduz-nos ainda a uma enorme diferença entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica: dois triângulos esféricos semelhantes são necessariamente congruentes! Como a área de um triângulo esférico depende apenas da soma dos seus ângulos internos, na esfera todos os triângulos com ângulos congruentes têm a mesma área; logo, são congruentes. Portanto, na Geometria Esférica não existem triângulos com a mesma forma e áreas diferentes.

Guião

I O Urso

Um urso, partindo da sua toca, andou 10 Km para Sul. Depois, mudou de direcção e caminhou 10 Km sempre em direcção a Este. Em seguida, voltou a mudar de direção e andou 10 Km para Norte, chegando novamente à sua toca. Qual é a cor do urso?

Adaptado do livro *"How to solve it"* do matemático G. Pólya.

Como podes verificar o percurso do urso não é possível no plano, ou seja, o urso não pode estar a caminhar numa superfície plana. E se ele estiver a caminhar numa superfície esférica como, por exemplo, a superfície terrestre?

II Geometria Esférica

A esfera pode ser considerada um modelo (simplificado) do planeta Terra e existe uma geometria que se dedica ao seu estudo: a Geometria Esférica. Como *superfície esférica* de centro O e raio $r > 0$ entenderemos o conjunto de pontos do espaço que estão à distância r de O.

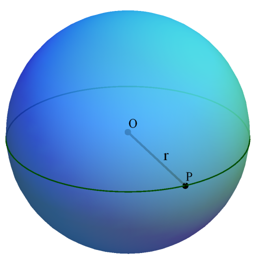


Figura 3: Esfera de centro O e raio r.

O estudo da Geometria Esférica pode permitir a resolução de problemas ligados ao planeta Terra: por exemplo, na época dos Descobrimentos, era muito importante saber qual o caminho mais curto entre dois locais do planeta e qual a rota que se deveria seguir; mesmo atualmente, em que o sistema GPS é uma ferramenta poderosa, os pilotos de avião e os navegadores têm que ter conhecimentos sobre Geometria Esférica. No âmbito da iniciativa internacional *Matemática do Planeta Terra 2013*, propomos-te a realização de um conjunto de tarefas para iniciares o estudo da Geometria Esférica bem como para explorares algumas das diferenças (surpreendentes) entre esta geometria e a Geometria Euclidiana.

III Tarefa

Qual é a área de um triângulo esférico?

1. Abre o ficheiro *área_de_um_triângulo.cdf* . Nesse ficheiro, encontras uma aplicação interativa com uma esfera de raio unitário com três pontos móveis assinalados, A, B e C, formando um triângulo.

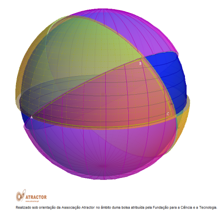


Figura 4: Ficheiro em formato CDF disponível em http://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/MateriaisEnsino.

2. Clica na caixa *Biângulos A*. Os dois círculos máximos que aparecem dividem a superfície esférica em quantas regiões? Cada uma dessas regiões quantos lados tem?

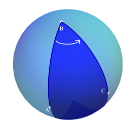
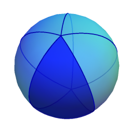


Figura 5: Na Geometria Esférica existem polígonos com dois lados, os biângulos ou lúnulas. Na figura está assinalado o ângulo ABC do biângulo colorido a azul escuro.

3. Sabendo que a área de uma esfera de raio r é $4\pi r^2$ e que a área do biângulo é diretamente proporcional à amplitude do seu ângulo, completa a tabela:

Biângulo	Ângulo	Área
semiesfera	πrad ou $180°$	$2\pi r^2$
$\frac{1}{4}$ de esfera		
$\frac{1}{5}$ de esfera		
$\frac{1}{n}$ de esfera		
biângulo	α	



4. Na aplicação interativa, clica na caixa *Interior do triângulo* e move os pontos de forma a obteres um triângulo esférico *pequeno*, ou seja, contido numa semiesfera. Clica nas caixas *Biângulos A e Biângulos B.* Observa que a interseção dosdois biângulos (um cor de rosa e outro azul) é o interior do triângulo e que a interseção dos outros dois corresponde ao interior do triângulo antípoda (triângulo formado pelos antípodas dos pontos do triângulo).

5. Clica na caixa *Biângulos C.* Quantos biângulos aparecem? Qual é a interseção desses biângulos? Quantas vezes esses biângulos "cobrem" o triângulo e o seu antípoda? E o que acontece na região esférica restante?

6. Relaciona a soma das áreas dos biângulos com a área da esfera e a área do triângulo (nota que o triângulo e o seu antípoda têm a mesma área). Usa essa relação para determinar uma fórmula para a área do triângulo em função das amplitudes dos seus ângulos internos.

E agora, já sabes qual é a cor do urso? Para saberes mais vai a www.atractor.pt/mat/GeomEsf.